



UNIVERSITY
OF TRENTO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

38050 Povo – Trento (Italy), Via Sommarive 14
<http://www.disi.unitn.it>

RAPPORTO TECNICO N.1 – STUDIO ED IMPLEMENTAZIONE DI UN MODELLO
ELETTROMAGNETICO PER ANALISI COPERTURA UMTS (MODELLO GANDINI
RIUSCITI) – DIT-PRJ-08-034

A. Massa, and ELEDIALab

Ottobre 2008

Technical Report # DISI-08-075



ELectromagnetic DIAgnostics Lab.
Information and Communication Technology
Dept.
University of Trento



Via Sommarive 14, 38050 Trento, ITALY
Phone +39 0461 882057 Fax +39 0461 882093
E-mail: andrea.massa@ing.unitn.it

Contract No. DIT-PRJ-08-034

Rapporto No. 1

*Studio ed Implementazione di un Modello
Elettromagnetico per Analisi di Copertura UMTS
(Modello GANDINI-RUSCITTI)*

Version: 2.0

Document status: Draft

Author: L. Manica

Access: Confidential

Date: 24.10.2008

Hour: 11.00

Table of Contents:

1. Introduzione	3
2. Stato dell'Arte	5
3. Formulazione Matematica del Modello	8
4. Planning Elettromagnetico	12
Appendice A	17
Bibliografia	20

1 Introduzione

L'introduzione del nuovo standard *Universal Mobile Telecommunication System*, *UMTS* ha portato ad una rivoluzione nelle telecomunicazioni mobili. La possibilità di trasmettere e ricevere dati digitali provenienti da sorgenti differenti come voce, video, immagini e internet ha favorito la convergenza tra il mondo delle telecomunicazioni e quello dell'informazione giacchè le diverse informazioni sono rappresentate univocamente mediante un unico flusso di dati digitali.

Le innovazioni tecnologiche che hanno portato allo sviluppo di questo nuovo sistema di comunicazione sono molteplici. A livello di protocollo di trasmissione l'introduzione del sistema *Wide-Code Divison Multiple Access* (*W-CDMA*) ha definito la separazione tra i segnali dei vari utenti a livello di codice anzichè di frequenza della portante. A livello di infrastrutture, ha portato all'utilizzo di celle di minor dimensione.

La costruzione di una rete *UMTS* capace di supportare un elevato traffico di informazioni e garantire una adeguata qualità di servizio è un dunque un processo laborioso ed estremamente costoso. Le variabili in gioco sono molteplici ed eterogenee e riguardano la morfologia e il grado di urbanizzazione del sito in esame, le caratteristiche delle stazioni-radio base quali la posizione, il tipo di antenna, l'altezza rispetto al suolo, la frequenza di lavoro, etc. A tutti questi parametri si aggiunge inoltre la complessità del canale wireless caratterizzato da elevata tempo-varianza e fenomeni di tipo multi-percorso che implicano una comunicazione tra stazione radio-base e terminale mobile attraverso percorsi differenti da quello diretto e producono sul segnale attenuazioni e ritardi variabili a seconda dell'istante di trasmissione. Diventa dunque fondamentale avere a disposizione strumenti in grado di prevedere in modo accurato, nella fase di progetto della rete, la copertura del segnale *UMTS*. Così facendo sarà possibile ottimizzare le risorse a disposizione, posizionando in modo adeguato le stazioni radio-base e trasmettendo i segnali secondo livelli di potenza che garantiscano una determinata qualità di servizio. Data la variabilità del canale di trasmissione, gli strumenti di previsione non possono essere di tipo deterministico in quanto computazionalmente onerosi, ma risultano essere di tipo statistico e forniscono una statistica del livello di segnale nel sito in esame. Una volta fissata la geometria del problema (morfologia e grado di urbanizzazione del territorio, posizione e potenza di trasmissione delle stazioni radio-base), l'obiettivo è quello di determinare una *mappa di copertura* del sito in esame. L'area individuata viene suddivisa in una griglia di *pixel*, e fissato un determinato livello di segnale y_{thr} e di probabilità P_{thr} , l'area identificata da un pixel risulta "servita" qualora il livello di segnale previsto y supera y_{thr} con una probabilità P maggiore di P_{thr} .

In questo documento, viene descritta una tecnica per la determinazione delle mappa di cop-

ertura *UMTS*. Partendo dai valori di potenza di segnale generato da stazioni radio base *UMTS* e calcolati utilizzando software di *planning* elettro-magnetico, i dati sono elaborati così da determinare una mappa di copertura, una volta fissato un valore di soglia per il rapporto segnale-interferente. La struttura del lavoro è la seguente. La Sezione 2 illustra lo stato dell'arte del problema della predizione elettromagnetica considerando le strategie utilizzate per lo sviluppo e la progettazione di reti *UMTS* e le tecniche per la determinazione della distribuzione spaziale del segnale trasmesso dalle stazioni radio-base (area di copertura). Verranno inoltre messe in luce le motivazioni alla base dell'approccio proposto la cui formulazione matematica è descritta nella Sezione 3. Nella Sezione 4, verranno dettagliati i vari passi procedurali necessari all'implementazione numerica del modello proposto ponendo l'attenzione sulle criticità dal punto di vista numerico-computazionale (tempi di calcolo, memoria occupata, mal condizionamento delle matrici, etc.).

2 Stato dell'Arte

L'utilizzo commerciale del sistema *UMTS* (*Universal Mobile Telecommunication System*), per l'erogazione di servizi di telefonia mobile di *terza generazione 3G* ad un elevato numero di utenti è piuttosto recente, ed ha inizio nel 2003 nel Regno Unito. I concetti, le idee e le caratteristiche del sistema *UMTS* risalgono invece ai primi anni 80 quando si fa strada l'ambizioso progetto di costruire un sistema di telecomunicazioni che permetta all'utente di comunicare ovunque ed in ogni momento mediante applicazioni allocate in terminali mobili di tipo "universale" [1]. In [2] l'implementazione del sistema *UMTS* nel Regno Unito viene discussa evidenziando i vantaggi del nuovo standard rispetto al *GSM*. In particolare, la qualità del servizio incrementata riferita alla possibilità di trasmettere a velocità elevate e supportare applicazioni multimediali, un aumento della capacità di canale a seguito dell'utilizzo di una ampia banda spettrale e modulazioni più efficienti, e la creazione di un nuovo mercato di telefonia mobile, libero e non soggetto a monopolio.

Un approfondimento delle diverse problematiche ed attività di ricerca relative allo sviluppo di una rete *UMTS*, è riportato in [3] laddove si fa riferimento alla necessità di un sistema di trasmissione dati armonizzato nei diversi Paesi che permetta un'integrazione con lo standard *GSM* e la disponibilità di nuovi protocolli per il trasferimento di elevati flussi di dati digitali con qualità di servizio adeguate. Lo sviluppo della rete *UMTS* si lega infatti al *coverage planning* (piano di copertura) ovvero alla copertura di un territorio con un determinato livello di segnale che permetta la trasmissione di un'adeguata quantità di dati.

Il progetto di un'infrastruttura *UMTS* richiede quindi il calcolo della densità, della grandezza e del tipo di celle che compongono la rete, ovvero di quei parametri strettamente correlati alla posizione e alla potenza irradiata dalle *BSs*. E' dunque necessario disporre di strumenti di calcolo efficienti per la predizione della copertura sul territorio al fine di ottimizzare le risorse disponibili. Una tale esigenza era già presente per il progetto di reti radio-mobili di precedente generazione. In [4] vengono riportate una serie di formule empiriche per il calcolo delle perdita di potenza del campo elettrico dovute alla propagazione, a partire da una serie di misure sperimentali effettuate in diversi ambienti e condizioni. In [5] viene sviluppato un sistema per il calcolo della propagazione del segnale *GSM* e di conseguenza della copertura di segnale sull'isola di Singapore. Nota la topologia del territorio, il valore di campo viene calcolato in modo puntuale utilizzando espressioni analitiche funzioni della distanza tra trasmettitore (*TX*) e ricevitore (*RX*) ed eventuali ostacoli tra gli stessi.

L'importanza della predizione della distribuzione del campo e.m. irradiato da un sistema di telecomunicazioni è sottolineata dalla gran mole di lavori prodotti. Ad esempio, si considerino gli elaborati di Walfisch *et al.* [6] e di Chung *et al.* [7] che riguardano lo studio di un modello

teorico per la propagazione di segnali nella banda UHF ($300\text{ MHz} - 3\text{ GHz}$) in ambiente urbano. Per il contesto urbano e rurale, le ricerche discusse in [8] considerano due modelli differenti. Il primo di tipo deterministico è basato sulla teoria della diffrazione mentre il secondo considera descrizioni di campo statistiche secondo la distribuzione di Reyleigh o di Rice per l'ambiente rurale e secondo la distribuzione di Nakasami per l'ambiente urbano.

Per quanto riguarda l'architettura *UMTS* il processo di *planning* della rete è concettualmente simile a quello di una rete *GSM* ma decisamente più complicato. I segnali dei vari utenti utilizzano la stessa frequenza di portante (*single frequency system SFS*) e la loro separazione avviene mediante il sistema *Wide-Code Divison Multiple Access (W - CDMA)*. Inoltre, il segnale ricevuto dal terminale mobile può essere la combinazione di segnali provenienti da diverse celle che sono sommati costruttivamente secondo il principio del *Maximum Ratio Combining (MCR)* [1]. Queste strategie di trasmissione implicano, non solo un adeguato livello di segnale ma anche che il rapporto segnale-rumore-interferente sia superiore ad una determinata soglia, al fine di ottenere un'adeguata qualità del servizio.

In [9, 10] sono descritte le prestazioni di diverse configurazioni architetture generate secondo il sistema Monte-Carlo (la scelta dei siti delle *BSs* è generata in modo casuale). Strumenti di *planning* più sofisticati sono invece quelli proposti da Allen in [11] dove è descritto il software *CDSSmartPlan* capace di considerare parametri quali diversi tipi di antenna e ottimizzare diverse caratteristiche della rete, o da Amaldi *et al.* [12, 13, 14] che fanno ricorso alla tecnica del *Tabù Search (TS)*. In [15], l'area di interesse viene suddivisa in *Traffic Demanding Areas (TDAs)* e per ognuna di esse è calcolata la posizione dei siti più opportuna mediante opportuni algoritmi di ottimizzazione che massimizzano la copertura dell'area considerata. Sempre facendo ricorso a tecniche di ottimizzazione sono stati recentemente proposte nuove metodologie da Yang *et al.* [16] e da Quintero *et al.* [17].

E' tuttavia degno di menzione il fatto che, a fronte degli strumenti di *planning*, con l'inclusione di vincoli sui valori di potenza e meccanismi caratteristici dell'*UMTS* quali il *soft-handover*, non sembra essere accompagnato dall'utilizzo di modelli di predizione più sofisticati. In generale, le descrizioni elettromagnetiche risultano molto semplici, spesso di natura empirica e non considerano la morfologia del territorio se non attraverso fattori di correzione.

Un tale fatto risulta del tutto sorprendente in quanto l'importanza di un modello di predizione accurato è ben nota. L'effetto di un modello di predizione inaccurato sul successivo progetto della rete è messo in evidenza in [18]. Il risultato può essere sia uno spreco di risorse (utilizzo di più *BSs* di quelle necessarie) sia un malfunzionamento globale della rete a seguito del raggiungimento di bassi valori di rapporto segnale-interferente.

A parziale giustificazione va sottolineato che il problema del calcolo dell'area di copertura di una *BS* è di difficile soluzione perchè esso dipende da fattori quali la morfologia dell'ambiente

circostante. Inoltre, il rapporto segnale-interferente è influenzato sia dall'interferenza causate da tutti terminali mobili presenti in *uplink* (traffico nella cella) sia dalla potenza trasmessa delle *BSs* in *downlink*. In tal contesto, le prime analisi del calcolo dell'interferenza in sistemi *CDMA* sono da ricercare nei lavori di Viterbi *et al.*, [19] e nel successivo [20]. Un modello più sofisticato è proposto da Stahele *et al.* in [21] e raffinato in [23]. Nota la posizione delle *BSs* e la distribuzione spaziale del traffico, un modello analitico risolve una serie di equazioni per determinare la distribuzione dell'interferenza relativa a celle diverse da quella analizzata. Questo tipo di approccio iterativo permette di includere nel rapporto segnale-interferente anche l'interferenza tra celle diverse mai considerata in precedenza. Una nuova strategia è descritta da Plitsis in [22] che estende il modello di Hata [4] introducendo il rapporto segnale-interferente e considerando statistiche di segnale di tipo Rice o di tipo Rayleigh dovute ai percorsi multipli del segnale. In [24], la procedura proposta considera due passi successivi: nel primo è calcolata la distribuzione del campo elettrico una volta nota la morfologia del territorio, nel secondo la distribuzione del campo è elaborata utilizzando le caratteristiche tecnologiche del sistema *UMTS*.

Il lavoro proposto da Gandini *et al.* [25] introduce alcuni elementi innovativi nel calcolo dell'area di copertura dei siti e fa riferimento al collegamento in *downlink* (stazione radio-base terminale mobile). Il rapporto segnale-interferente è calcolato mediante un modello analitico e successivamente migliorato introducendo una descrizione statistica del livello di segnale come in [19, 21, 22]. Nel seguito il modello è analizzato in dettaglio proponendo altresì uno schema di implementazione.

3 Formulazione Matematica del Modello

Nello standard *UMTS*, le trasmissioni di diversi utenti connessi nella medesima cella avvengono alla stessa frequenza. La comunicazione è resa possibile dall'utilizzo del sistema CDMA (*Code Division Multiple Access*) che permette a tutti gli utenti di occupare simultaneamente la stessa banda e trasmettere negli stessi istanti temporali. Ad ogni utente è assegnato un codice che permette, in fase di ricezione, di discriminare tra loro le comunicazioni di vari utenti. Per garantire una qualità di servizio soddisfacente non è dunque sufficiente garantire un adeguato livello di potenza di segnale occorre altresì che il rapporto *chip-energy to interference*, superiore ad una determinata soglia.

La soluzione di questo problema deve tenere in considerazione sia l'architettura ed i protocolli del sistema *UMTS* che l'area di copertura. Il dispositivo mobile può ricevere segnali provenienti da diverse celle nello stesso istante temporale (*soft-handover*) (Figura 1). Questi segnali sono combinati tra loro utilizzando un ricevitore di tipo *rake* e l'algoritmo di *Maximum Ratio Combining (MRC)*. In prima approssimazione, si considera come valore di segnale in arrivo sul terminale mobile quello massimo proveniente dalle diverse celle. Tale ipotesi sottostima il valore di segnale utile ma permette di fornire una descrizione per il modello matematico proposto [25].

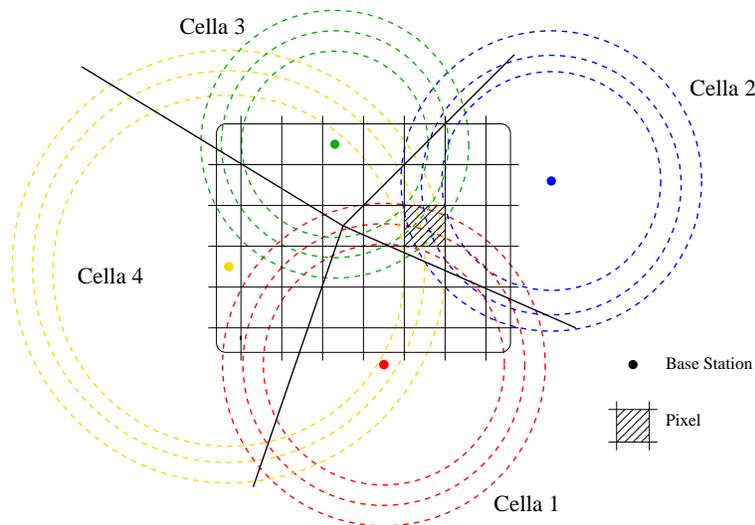


Figura 1: schema di un sito *UMTS*

Inoltre, poichè la trasmissione dei segnali *UMTS* avviene in un canale di tipo multi-percorso tempo-variante, risulta necessario definire un modello stocastico per la definizione di una mappa di copertura del sito. La zona in esame viene quindi divisa in aree di dimensione costante detti *pixel* che saranno classificati come “coperti” o meno a seconda del fatto che il corrispondente rapporto segnale-interferente sia maggiore di una determinata soglia con un certo livello di probabilità. A tal fine è quindi necessario determinare sia la *probability*

density function (pdf) e che la *comulative density function (cdf)* delle seguenti quantità: (a) la potenza di segnale nel pixel, (b) del rapporto segnale-interferente e (c) della potenza del segnale effettivamente ricevuto dal terminale mobile.

3.1 Modello Matematico

Si consideri un sito *UMTS*. L'area di indagine D è divisa in J sotto-aree di dimensione fissa chiamate *pixel*. Un dispositivo mobile presente nel j -esimo pixel riceve segnali provenienti da N celle diverse (Figura 2).

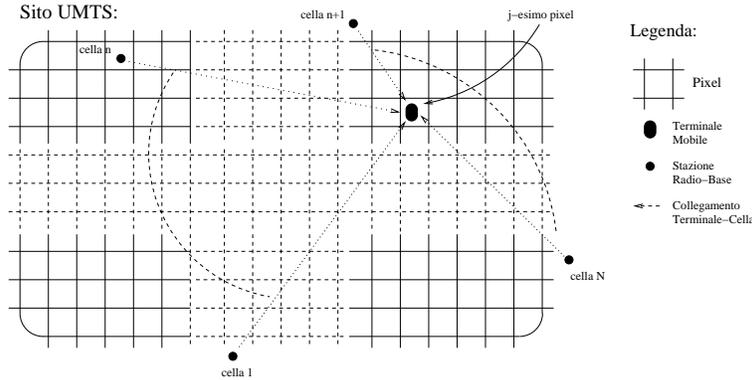


Figura 2: dispositivo mobile nel j -esimo pixel che riceve il segnale da N celle

Si indichi con $\mathbf{X}^j = \{(x_n^j); n = 1, \dots, N; | x_n^j \in \mathfrak{R}\}; j = 1, \dots, J$ l'insieme del livello di segnale in dB proveniente dall' n -esima cella misurato nel j -esimo pixel mentre con $\mathbf{Y}^j = \{(y_n^j); n = 1, \dots, N; | y_n^j \in \mathfrak{R}^+\}; j = 1, \dots, J$ si definisca l'insieme dei valori del rapporto segnale-interferente che corrispondono al collegamento tra terminale mobile e l' n -esima cella. I valori y_n^j sono calcolati a mediante la seguente espressione [25]:

$$y_n^j = \left(\frac{E_c}{I_0}\right)_n^j = \frac{10^{x_n^j/10}}{a_{n1}10^{x_1^j/10} + \dots + a_{nN}10^{x_N^j/10} + c_n}; n = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Nell'equazione (1) i valori $a_{nn}; n, n = 1, \dots, N$ sono rappresentativi del rapporto tra la potenza del segnale pilota e quella totale trasmessa dall' n -esima cella, mentre il valore c_n descrive il rumore termico presente nell' n -esima cella. Nell'equazione (1) si può notare come il numeratore $10^{x_n^j/10}; n = 1, \dots, N$ rappresenti la parte di segnale utile (*chip energy, E_c*), mentre al denominatore, l'interferente I_0 è calcolato come la somma di tutti i segnali presenti nel pixel che non costituiscono informazione per il terminale mobile e dal rumore termico c_n . Tale formulazione ipotizza che il terminale mobile sia connesso con tutte le celle che trasmettono nel pixel, e che dunque esso sia in *soft-handover* con tutte le N celle. Tra tutti i segnali presenti nel j -esimo pixel, si indichi con y^j quello associato al collegamento terminale-cella con il miglior rapporto segnale-interferente:

$$y^j = \max(y_n^j); n = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Il valore di y^j calcolato secondo l'espressione (2) è quello utilizzato per la trasmissione e ricezione dell'informazione da parte del terminale mobile. Si definisca dunque la funzione $F^j : \mathbf{X}^j \rightarrow \mathbf{Y}^j$ che mappa l'insieme dei valori di campo e.m. provenienti dalle N celle presenti nel j -esimo pixel con i corrispondenti rapporti segnale-interferente:

$$F^j(X^j) = Y^j = \left(\frac{10^{x_1^j/10}}{a_{11}10^{x_1^j/10} + \dots + a_{1N}10^{x_N/10} + c_1}, \dots, \frac{10^{x_N^j/10}}{a_{N1}10^{x_1^j/10} + \dots + a_{NN}10^{x_N/10} + c_N} \right), \quad (3)$$

dove, nell'equazione (3) $X^j \in \mathbf{X}^j$, $Y^j \in \mathbf{Y}^j$ e gli a_{nn} ; $n = 1, \dots, N$ e i c_n ; $n = 1, \dots, N$ sono stati precedentemente descritti. Si determini la copertura del pixel j -esimo definendo una soglia di funzionamento y_{thr}^j e valutando la seguente disuguaglianza:

$$y^j > y_{thr}^j \quad (4)$$

Se la disuguaglianza (4) è verificata allora il rapporto segnale-interferente del collegamento tra terminale mobile e cella è superiore alla soglia di funzionamento il pixel si dirà "coperto" viceversa il pixel sarà "non coperto".

Nella formulazione fin qui proposta, i valori di campo e.m. X^j e di rapporto segnale-interferente Y^j sono stati considerati come valori deterministici. Tale approccio non considera fenomeni legati alla tempo-varianza del canale *wireless*, che provocano fluttuazioni nell'ampiezza del segnale (*fading* lento e veloce del canale). Si rende dunque necessario trattare il problema della copertura considerando descrizioni del segnale trasmesso dalla stazione radio-base al terminale mobile di tipo statistico. Si indichi dunque con p_{x^j} la funzione densità di probabilità di X^j e con p_{y^j} la funzione densità di probabilità di Y^j e si consideri la copertura del pixel secondo la definizione: il j -esimo pixel è "coperto" se, fissato un valore di probabilità P_{thr} e un valore di soglia per il rapporto segnale-interferente y_{thr} , quest'ultimo è superato dal massimo rapporto segnale-interferente y^j con probabilità P^j maggiore di P_{thr} . Al fine di ottenere una mappa di copertura del sito *UMTS* in esame si calcoli, per ciascuno dei J *pixel*, la probabilità che il corrispondente y^j sia maggiore della soglia y_{thr} e la si confronti con la probabilità P_{thr} . A tal scopo, si consideri il pixel j -esimo, e si determini la seguente quantità:

$$P \left[\max(y_1^j, \dots, y_N^j) > y_{thr} \right], \quad (5)$$

Applicando il principio di complementarità, l'espressione (5) si riscrive come:

$$P \left[\max (y_1^j, \dots, y_N^j) > y_{thr} \right] = 1 - P \left[\max (y_1^j, \dots, y_N^j) < y_{thr} \right]. \quad (6)$$

Si calcoli la parte destra dell'equazione (6) mediante l'integrazione della p_{y^j} su un opportuno dominio:

$$1 - P \left[\max (y_1^j, \dots, y_N^j) < y_{thr} \right] = 1 - \int_{A_{y_{thr}}^j} p_{y^j} (y_1^j, \dots, y_N^j) dy_1^j \dots dy_N^j \quad (7)$$

dove nell'equazione (7) il dominio di integrazione $A_{y_{thr}}^j$ è definito da:

$$A_{y_{thr}}^j = \mathbf{Y}^j \cap \left\{ y_n^j \mid 0 < y_n^j < y_{thr}; \forall n = 1, \dots, N \right\}; j = 1, \dots, J, \quad (8)$$

e contiene gli $Y^j \in \mathbf{Y}^j$ in cui tutti gli elementi y_n^j ; $n = 1, \dots, N$ hanno valore inferiore a y_{thr} . La funzione p_{y^j} non è nota a priori ed il valore della (7) si calcola esprimendo l'integrale in funzione di p_{x^j} che è conosciuta e di tipo normale [21]. Si applichi all'integrale in (7) il Teorema del Cambio di Variabile e si ottenga:

$$\int_{A_{y_{thr}}^j} p_{y^j} (y_1^j, \dots, y_N^j) dy_1^j \dots dy_N^j = \int_{A_{y_{thr}}^j} p_{x^j} \circ G^j (y_1^j, \dots, y_N^j) \det J_{G^j} dy_1^j \dots dy_N^j \quad (9)$$

dove nell'equazione (9) G^j è la funzione inversa di F^j (3) mentre $\det J_{G^j}$ è il jacobiano di G^j (dettagli sul calcolo di G^j e di $\det J_{G^j}$ sono presenti in Appendice A). Si sostituisca (9) in (6) e si ottenga:

$$P \left[\max (y_1^j, \dots, y_N^j) > y_{thr} \right] = 1 - \int_{A_{y_{thr}}^j} p_{x^j} \circ G^j (y_1^j, \dots, y_N^j) \det J_{G^j} dy_1^j \dots dy_N^j \quad (10)$$

Infine, si confronti il risultato ottenuto dalla (10) con la probabilità di soglia P_{thr} . La copertura del pixel si avrà nel caso di valori di probabilità superiori alla soglia.

4 Planning Elettromagnetico

Si consideri la costruzione di una mappa di copertura per un sito *UMTS* una volta fissati (*i*) un valore di soglia per il rapporto segnale interferente, y_{thr} e (*ii*) una probabilità che questo evento accada, P_{thr} . Una volta diviso il sito in esame secondo una griglia di J pixel per ognuno di essi si calcoli il valore espresso da (10) e si valuti se esso sia maggiore o minore di P_{thr} .

Si descriva la strategia che permette tale valutazione mediante le seguenti operazioni:

- Si setti un valore di soglia y_{thr} e di probabilità P_{thr}
- Per ciascun dei J pixel in cui è diviso il sito:
 - Si discretizzi lo spazio \mathbf{Y}^j .
 - Si costruisca il dominio di integrazione $A_{y_{thr}}^j$.
 - Si calcoli $G^j(y_1^j, \dots, y_N^j)$ con $(y_1^j, \dots, y_N^j) \in A_{y_{thr}}^j$.
 - Si determini $\det J_{G^j}$.
 - Si calcoli $P[y^j > y_{thr}]$.
 - Si valuti la copertura del pixel.

4.1 Discretizzazione dello Spazio \mathbf{Y}^j

La discretizzazione dello spazio \mathbf{Y}^j è un'operazione non complessa ma estremamente delicata; due sono i parametri fondamentali da considerare: l'intervallo di variazione dei valori in \mathbf{Y}^j e il passo di discretizzazione. E' possibile determinare il valore minimo e massimo che può essere assunto dagli elementi di $Y^j \in \mathbf{Y}^j$ utilizzando il seguente limite [25]:

$$\lim_{w_n^j \rightarrow \infty} \frac{w_n^j}{a_{n1}w_1^j + \dots + a_{nN}w_N^j + c_n} = \frac{1}{a_{nn}}; \quad n = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, J \quad (11)$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \inf(y_n^j) &= 0 \\ \sup(y_n^j) &= \frac{1}{a_{nn}} \end{aligned}; \quad n = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, J, \quad (12)$$

allora ogni elemento di Y^j può assumere qualunque valore compreso tra 0 e $1/a_{nn}$, cioè $y_n^j \in (0, \frac{1}{a_{nn}})$. Si divida l'intervallo $(0, \frac{1}{a_{nn}})$ in M intervalli di dimensione Δy_n^j :

$$\Delta y_n^j = \frac{1/a_{nn}}{M_n}; \quad n = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, J \quad (13)$$

e si generi la sequenza di $M + 1$ campioni \widehat{y}_n^j come:

$$\widehat{y}_n^j = \left\{ (y_n^j)^m = m\Delta y_n^j; m = 0, \dots, M_n \right\}; n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J. \quad (14)$$

Si osservi come dalla (14) segue $(y_n^j)^0 = \inf(y_n^j) = 0$ e $(y_n^j)^M = \sup(y_n^j) = \frac{1}{a_{nn}}$. Lo spazio \mathbf{Y}^j viene dunque discretizzato da $\prod_{n=1}^N (M_n + 1)$ vettori $\widehat{Y}^j = (\widehat{y}_1^j, \dots, \widehat{y}_N^j)$ costruiti mediante le sequenze $\widehat{y}_n^j; n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J$.

4.2 Calcolo del Dominio di Integrazione $A_{y_{thr}}^j$

Si considerino i vettori $\widehat{Y}^j = (\widehat{y}_1^j, \dots, \widehat{y}_N^j)$ calcolati al punto precedente. Il dominio di integrazione $A_{y_{thr}}^j$ contiene tutti i vettori \widehat{Y}^j per i cui elementi vale la relazione:

$$\widehat{y}_n^j < y_{thr} \quad \forall n = 1, \dots, N. \quad (15)$$

La relazione (15) impone che tutti gli elementi dei vettori presenti nel dominio di integrazione $A_{y_{thr}}^j$ siano inferiori alla soglia y_{thr} .

4.3 Calcolo di $G^j(y_1^j, \dots, y_N^j)$

Il calcolo dei valori della funzione $G^j(y_1^j, \dots, y_N^j)$ prevede che per ogni campione $\widehat{Y}^j \in A_{y_{thr}}^j$ si calcoli il valore di $X^j \in \mathbf{X}^j$ che lo ha generato tramite F . Tale procedimento avviene in due passi utilizzando le funzioni inverse S (35) ed L (36) ed è visualizzato globalmente in Figura 3.

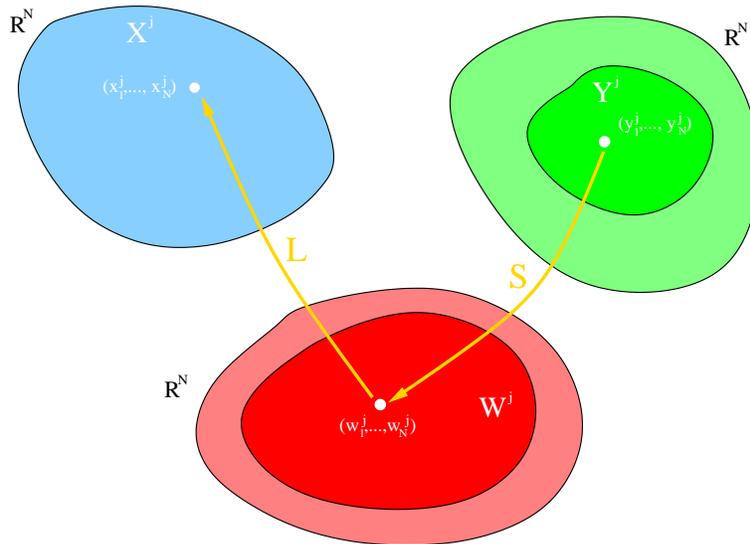


Figura 3: schema del processo di inversione, dall'insieme \mathbf{Y}^j all'insieme \mathbf{X}^j

Il primo passo riguarda il passaggio dallo spazio \mathbf{Y}^j allo spazio \mathbf{W}^j ed avviene mediante la soluzione del sistema descritto dall'equazione (31) in cui il termine noto è costruito considerando gli $\widehat{Y}^j \in A_{y_{thr}}^j$:

$$A^j W^j = B^j . \quad (16)$$

Una volta calcolato il vettore $W^j = (w_1^j, \dots, w_N^j)$ soluzione del sistema il valore di X^j associato si calcola utilizzando l'espressione (36):

$$X^j = (10 \log w_1^j, \dots, 10 \log w_N^j) \quad (17)$$

4.4 Calcolo di $\det J_{G^j}$

Si consideri l'espressione (39) che esprime il $\det J_{G^j}$ come funzione di $\det J_{E^j}$ e $\det J_{T^j}$. La matrice J_E è una matrice $N \times N$ diagonale della forma:

$$J_{E^j} = \frac{\ln 10}{10} \begin{bmatrix} 10^{x_1^j/10} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 10^{x_N^j/10} \end{bmatrix} . \quad (18)$$

Si calcoli il determinante di J_{E^j} moltiplicando gli elementi presenti sulla diagonale della matrice:

$$\det J_{E^j} = \frac{\ln 10}{10} \prod_{n=1}^N 10^{x_n^j/10} \quad (19)$$

Si semplifichi ulteriormente l'equazione (19) utilizzando le proprietà degli esponenziali:

$$\det J_E = \frac{\ln 10}{10} 10^{\sum_{n=1}^N \frac{x_n^j}{10}} \quad (20)$$

Si consideri ora la matrice J_{T^j} . Essa è una matrice $N \times N$ nella forma:

$$J_{T^j} = \begin{bmatrix} \frac{\delta y_1^j}{\delta w_1^j} & \dots & \frac{\delta y_1^j}{\delta w_N^j} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\delta y_N^j}{\delta w_1^j} & \dots & \frac{\delta y_N^j}{\delta w_N^j} \end{bmatrix} \quad (21)$$

in cui gli elementi sono calcolati secondo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\frac{\delta y_n^j}{\delta w_n^j} &= \frac{a_{n1}w_1^j + \dots + a_{(n-1)(n-1)}w_{n(n-1)}^j + a_{(n+1)(n+1)}w_{n(n+1)}^j \dots + a_{nN}w_N^j + c_n}{(d_n^j)^2}, \quad n = 1, \dots, N \\ \frac{\delta y_n^j}{\delta w_m^j} &= -\frac{a_{nm}w_n^j}{(d_n^j)^2}, \quad n, m = 1, \dots, N \quad n \neq m\end{aligned}\tag{22}$$

dove nell'equazione (22) i denominatori d_n^j sono calcolati come:

$$d_n^j = a_{n1}w_1^j + \dots + a_{nN}w_N^j + c_n; \quad n = 1, \dots, N\tag{23}$$

Una volta costruita la matrice J_{T^j} il calcolo del suo determinante può avvenire mediante l'utilizzo della formula che prevede l'espansione del determinante mediante i minori della matrice.

4.5 Calcolo di $P[y^j > y_{thr}]$

Il calcolo di $P[y^j > y_{thr}]$ si ottiene risolvendo la seguente equazione:

$$P[y^j > y_{thr}] = 1 - \int_{A_{y_{thr}}^j} p_{x^j} \circ G(y_1^j, \dots, y_N^j) \det J_G dy_1^j \dots dy_N^j\tag{24}$$

Il calcolo dell'integrale può essere risolto mediante tecniche di integrazione numerica che prevedono la discretizzazione del dominio $A_{y_{thr}}^j$ e l'approssimazione dello stesso come sommatorie di *iper-parallelepidi* (parallelepidi di uno spazio N - dimensionale).

Si noti come la funzione densità di probabilità p_{x^j} è una gaussiana N -dimensionale [21] la cui espressione vale:

$$p_{x^j} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^j - \mu^j)^t \Sigma^{-1}(x^j - \mu^j)\right]\tag{25}$$

dove nell'equazione (25) sia $\mu^j = [\langle x_1^j \rangle, \dots, \langle x_N^j \rangle]$ il vettore dei valori medi dei termini x_n^j ; $n = 1, \dots, N$ mentre sia Σ la matrice di covarianza, e siano $|\Sigma|$ e Σ^{-1} rispettivamente il determinante e la matrice inversa di Σ . Benchè l'espressione di p_{x^j} sia nota non lo sono i parametri che la caratterizzano, Σ e μ^j ; il primo è calcolato a partire da modelli statistici noti in letteratura [8, 6] mentre il secondo è determinato utilizzando il *software* di *planning* elettromagnetico *ATOLL*. Tale software calcola in modo deterministico la distribuzione di campo e.m. di un sito considerando diversi fattori quali la topologia e il grado di urbanizzazione del territorio in esame, la posizione e la potenza di trasmissione delle stazioni radio-base, etc.. Il valore dell' n -esimo elemento del vettore μ^j corrisponde al valore di campo e.m. generato dall' n -esima cella nel j -esimo pixel calcolato da *ATOLL*.

4.6 Valutazione della Copertura del Pixel

Una volta ottenuto il valore dell'equazione (24) la valutazione della copertura del pixel avviene verificando la disuguaglianza (5):

$$P \left[y^j > y_{thr} \right] > P_{thr} \quad (26)$$

dove y_{thr} e P_{thr} sono rispettivamente il valore di rapporto segnale interferente desiderato e P_{thr} la probabilità con cui si desidera esso di verificarsi.

Appendice A

La costruzione di una mappa di copertura per siti *UMTS* presuppone il calcolo dell'integrale presente nell'equazione (10). Tale calcolo implica la conoscenza della funzione inversa di F^j , G^j e del valore del determinante della sua matrice jacobiana $\det J_{G^j}$. Lo scopo di questa appendice è dunque quello di determinare un'espressione analitica per: (a) la funzione inversa di F^j , $G^j : \mathbf{Y}^j \rightarrow \mathbf{X}^j$ e (b) per il determinante della matrice jacobiana ad essa associato $\det J_{G^j}$.

(a) Espressione Analitica di $G^j = (F^j)^{-1}$

Si consideri la funzione $F : \mathbf{X}^j \rightarrow \mathbf{Y}^j$:

$$F^j(X^j) = Y^j = \left(\frac{10^{x_n^j/10}}{a_{11}10^{x_1^j/10} + \dots + a_{1N}10^{x_N^j/10} + c_1}, \dots, \frac{10^{x_N^j/10}}{a_{N1}10^{x_1^j/10} + \dots + a_{NN}10^{x_N^j/10} + c_N} \right), \quad (27)$$

si noti come i valori di Y^j non dipendono linearmente dai valori di X^j . Allo scopo di semplificare il calcolo della funzione inversa si definisca $\mathbf{W}^j = \{(w_n^j); n = 1, \dots, N; | w_n^j \in \mathfrak{R}\}$; $j = 1, \dots, J$ come l'insieme dei valori del livello di segnale in scala lineare proveniente dall' n -esima cella misurato nel j -esimo pixel. Si esegua la seguente trasformazione dei valori di X^j da dB in scala lineare secondo la funzione $E^j : \mathbf{X}^j \rightarrow \mathbf{W}^j$:

$$E(X^j) = W^j = (10^{x_1^j/10}, \dots, 10^{x_N^j/10}); j = 1, \dots, J. \quad (28)$$

Dove, in (28) $W^j \in \mathbf{W}^j$. Si sostituisca l'espressione (28) in (27) e si ottenga la funzione $T^j : \mathbf{W}^j \rightarrow \mathbf{Y}^j$ come:

$$T(W^j) = Y^j = \left(\frac{w_1^j}{a_{11}w_1^j + \dots + a_{1N}w_N^j + c_1}, \dots, \frac{w_N^j}{a_{N1}w_1^j + \dots + a_{NN}w_N^j + c_N} \right). \quad (29)$$

Nell'equazione (29) vale $w_n^j > 0$; $n = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, J$ ed inoltre $a_{nn} > 0$; $n, n = 1, \dots, N$ e $c_n > 0$; $n = 1, \dots, N$. Da questo segue che T^j non presenta discontinuità in quanto:

$$a_{n1}w_1^j + \dots + a_{nN}w_N^j + c_n \neq 0; n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J. \quad (30)$$

Si riscriva ora l'equazione (29) come [25]:

$$A^j W^j = B^j, \quad (31)$$

dove in (31) la matrice del sistema A^j è una matrice $N \times N$ i cui elementi sono calcolati secondo la seguente espressione:

$$A^j = \begin{bmatrix} (y_1^j a_{11} - 1) & \dots & y_1^j a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_N^j a_{N1} & \dots & (y_N^j a_{NN} - 1) \end{bmatrix}; j = 1, \dots, J, \quad (32)$$

mentre il termine noto B^j è una matrice colonna $N \times 1$ i cui elementi valgono:

$$B^j = \begin{bmatrix} -y_1^j c_1 \\ \dots \\ -y_N^j c_N \end{bmatrix}; j = 1, \dots, J. \quad (33)$$

Le incognite del sistema di equazioni sono gli elementi della matrice colonna $N \times 1$, W^j :

$$W^j = \begin{bmatrix} w_1^j \\ \dots \\ w_N^j \end{bmatrix}; j = 1, \dots, J. \quad (34)$$

Si dimostra come il determinante della matrice A è non nullo e dunque il sistema è risolvibile e la soluzione è unica [25]. Si definisca dunque la funzione inversa di T^j , $S^j : \mathbf{Y}^j \rightarrow \mathbf{W}^j$ come:

$$S^j (Y^j) = W^j = \frac{1}{\det A^j} (\det A_1^j, \dots, \det A_N^j), \quad (35)$$

dove nell'equazione (35) $\det A^j$ indica il determinante della matrice A^j mentre i valori $\det A_n^j$; $n = 1, \dots, N$ sono i determinanti delle matrici che si ottengono scambiando la riga n -esima di A^j con il termine noto B^j . La funzione S^j rappresenta la soluzione del sistema (31) una volta fissati i valori del termine noto B^j e della matrice A^j .

Si noti come, una volta calcolato W^j , sia possibile determinare il corrispondente valore di X^j invertendo l'espressione (28). Si definisca dunque la funzione inversa di E^j , $L^j : \mathbf{W}^j \rightarrow \mathbf{X}^j$ come:

$$L^j (W^j) = X^j = (10 \log w_1^j, \dots, 10 \log w_N^j); j = 1, \dots, J. \quad (36)$$

da cui segue che la funzione inversa di F è calcolata mediante la composizione delle funzioni L ed S . Si avrà dunque:

$$G = L \circ S \quad (37)$$

L'intera modalità di passaggio da uno spazio all'altro è visualizzata in Figura 4.

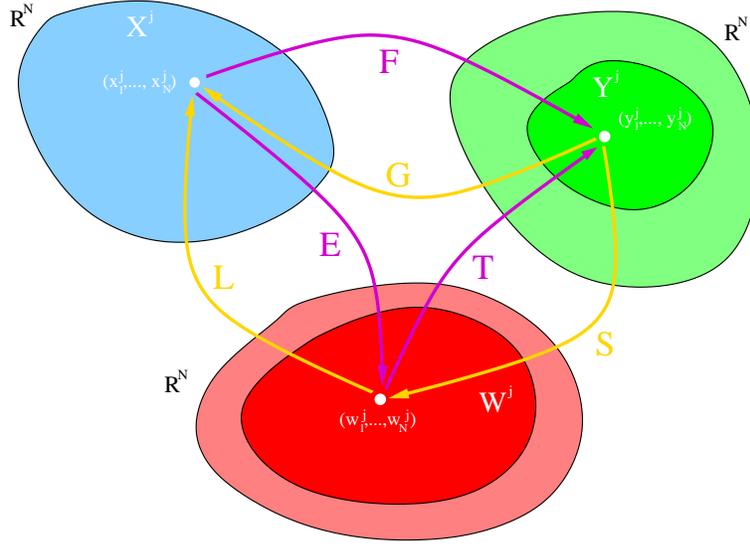


Figure 4: Insiemi X^j, W^j e Y^j con le funzioni F^j, G^j, E^j, L^j, S^j e T^j

(b) Espressione Analitica di $\det J_{G^j}$

I precedenti risultati permettono di calcolare il valore del determinante della matrice giacobiana relativa alla funzione G^j , $\det J_{G^j}$. Per il teorema della funzione inversa vale la seguente relazione tra le matrici giacobiane delle funzioni G^j, E^j e T^j :

$$J_{G^j}(y_1^j, \dots, y_N^j) = [J_{E^j}(x_1^j, \dots, x_N^j)]^{-1} [J_{T^j}(w_1^j, \dots, w_N^j)]^{-1} \quad (38)$$

dove nell'equazione (38) si ha $(x_1^j, \dots, x_N^j) = G(y_1^j, \dots, y_N^j)$ e $(w_1^j, \dots, w_N^j) = S(y_1^j, \dots, y_N^j)$. Si applichi la proprietà relativa al determinante di prodotto di matrici all'equazione (38) e si ottenga:

$$\det J_{G^j}(y_1^j, \dots, y_N^j) = [\det J_{E^j}(x_1^j, \dots, x_N^j) \det J_{T^j}(w_1^j, \dots, w_N^j)]^{-1} \quad (39)$$

La (39) permette il calcolo di $\det J_{G^j}$ una volta noti $\det J_{E^j}$ e $\det J_{T^j}$.

References

- [1] F. Muratore, *UMTS Mobile Communications for the Future*, New York, NY: John Wiley & Sons, 2000.
- [2] P. Stevens, "Operator Design and Planning Issues for UMTS Network," *IEE Colloquium on UMTS - The R&D Challenges*, pp. 3/1-3/5, Nov. 1998.
- [3] E. Berruto, M. Gudmundson, R. Menolascino, W. Mohr, and M. Pizarroso, "Research Activities on UMTS Radio Interface, Network Architectures, and Planning," *IEEE Communications Magazine*, vol. 36, no. 2, pp. 82-95, Feb. 1998.
- [4] M. Hata, "Empirical Formula for Propagation Loss in Land Mobile Radio Services," *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, vol. VT-29, no. 3, Aug. 1980.
- [5] G. K. Chan, "Propagation and Coverage Prediction for Cellular Radio Systems," *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, vol. 40, no. 4, pp. 665-670, Nov. 1991.
- [6] J. Walfisch, and H. L. Bertoni, "A Theoretical Model of UHF Propagation in Urban Environments," *IEEE Trans. on Antennas Propag.*, vol. 36, no. 12, pp. 1788-1796, Dec. 1988.
- [7] H. K. Chung, and H. L. Bertoni, "Range-Dependent Path-Loss Model in Residential Areas for the VHF and UHF Bands," *IEEE Trans. on Antennas Propag.*, vol. 50, no. 1, pp. 1-11, Jan. 2002.
- [8] M. Lebherz, W. Weisbeck, and W. Krank, "A Versatile Wave Propagation Model for VHF/UHF Range Considering Three-Dimensional Terrain," *IEEE Trans. on Antennas Propag.*, vol. 40, no. 10, pp. 1121-1131, Oct. 1992.
- [9] D. Lister, S. Dehghan, R. Owen, and P. Jones, "UMTS Capacity and Planning Issue," *1st International Conference on 3G Mobile Communications Techn.*, pp. 218-223, Mar. 2000.
- [10] C. Faure, T. L. Lee, and D. Bosovic, "UMTS Border Planning Issues," *IEEE Vehicular Technology Spring Conference 2001*, vol. 4, pp. 2761-2765, May 2001.
- [11] S. Allen, B. Belloul, S. Hurley, S. Saunders, R. M. Whitaker, "Smart Cell Planning and Optimisation for UMTS," *5th IEE International Conference on 3G Mobile Communications Techn.*, pp. 34-38, 2004.

- [12] E. Amaldi, A. Capone, and F. Malucelli, "Improved Models and Algorithms for UMTS Radio Planning," *IEEE Vehicular Technology Fall Conference 2001*, vol. 2, pp. 920-924, Oct. 2001.
- [13] E. Amaldi, A. Capone, and F. Malucelli, "Planning UMTS Base Station Location: Optimization Models With Power Control and Algorithms," *IEEE Trans. on Wireless Com.*, vol. 2, no. 5, pp. 939-952, Sep. 2003.
- [14] E. Amaldi, A. Capone, F. Malucell, and F. Signori, "A Mathematical Programming Approach for W-CDMA Radio Planning with Uplink and Downlink Constraints," *IEEE Vehicular Technology Fall Conference 2003*, vol. 2, pp. 806-810, Oct. 2003.
- [15] J. Zhang, L. Guo, and J. Y. Wu, "An Integrated Approach for UTRAN Planning and Optimization," *IEEE Vehicular Technology Spring Conference 2004*, vol. 4, pp. 2360-2364, May 2004.
- [16] J. Yang, M. E. Aydin, J. Zhang, and C. Maple "UMTS Base Station Location Planning: a Mathematical Model and Heuristic Optimisation Algorithms," *IET Communication*, vol. 1(5), pp. 1007-1014, Oct. 2007.
- [17] A. Quintero, S. Pierre, "On the Design of Large-Scale UMTS Mobile Networks Using Hybrid Genetic Algorithm," *IEEE Trans. on Vehicular Tech.*, vol. 57, no. 4, pp. 2498-2508, July 2008.
- [18] M. Coinchon, A-P. Salovaara, and J-F. Wagen, "The impact of radio propagation predictions on urban UMTS planning," *IEEE International Zurich Seminar on Broadband Communications*, pp. 32/1-32/6, Feb. 2002.
- [19] A. M. Viterbi, and A. J. Viterbi, "Erlang Capacity of a Power Controlled CDMA System," *IEEE Journal on Sel. Areas in Comm.*, vol. 11, no. 6, pp. 892-900, Aug. 1993.
- [20] A. J. Viterbi, and A. M. Viterbi, and E. Zehavi, "Other-cell Interference in Cellular Power-Controlled CDMA," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 1501-1504, Feb./Mar./Apr. 1994.
- [21] D. Staehle, K. Leibnitz, and K. Heck, "A Fast Prediction of the Coverage Area in UMTS Networks," *IEEE Global Telecommunication Conference GLOBECOM 2002*, vol. 1, pp. 615-619, Nov. 2002.
- [22] G. Plitsis, "Coverage Prediction of New Elements of Systems Beyond 3G: The IEEE 802.16 System as a Case Study," *IEEE Vehicular Technology Fall Conference 2003*, vol. 4, pp. 2292-2296, Oct. 2003.

- [23] D. Staehle, "An Analytic Method for Coverage Prediction in the UMTS Radio Network Planning Process," *IEEE Vehicular Technology Spring Conference 2005*, vol. 3, pp. 1945-1949, May 2005.
- [24] F. Giannetti, P. Nepa, A.N. D'Andrea, and G. Manara, "Coverage Prediction of Cellular MC-CDMA Using a Deterministic Propagation Model," *Wireless Personal Multimedia Communications 2005*, Paper No. 1051, Sep. 2005.
- [25] L. Gandini and G. Ruscitti, "A New Method for Estimation of UMTS Coverage Areas by Planning Tool," *Internal Report VODAFONE Italia*, 2008.
- [26] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, NY: New York, Springer, 2000.