



UNIVERSITY
OF TRENTO

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

38050 Povo – Trento (Italy), Via Sommarive 14
<http://www.disi.unitn.it>

RAPPORTO TECNICO N.2 – STUDIO ED IMPLEMENTAZIONE DI UN MODELLO
ELETTROMAGNETICO PER ANALISI COPERTURA UMTS (MODELLO GANDINI
RIUSCITI) – DIT-PRJ-08-034

A. Massa, and ELEDIALab

Ottobre 2008

Technical Report # DISI-08-076



ELectromagnetic DIAgnostics Lab.
Information and Communication Technology
Dept.
University of Trento



Via Sommarive 14, 38050 Trento, ITALY
Phone +39 0461 882057 Fax +39 0461 882093
E-mail: andrea.massa@ing.unitn.it

Contract No. DIT-PRJ-08-034

Rapporto No. 2

*Studio ed Implementazione di un Modello
Elettromagnetico per Analisi di Copertura UMTS
(Modello GANDINI-RUSCITTI)*

Version: 1.0

Document status: Draft

Author: L. Manica

Access: Confidential

Date: 24.10.2008

Hour: 19.00

Table of Contents:

1. Introduzione	3
2. Dati in Ingresso	4
3. Procedura per l'Analisi di Copertura UMTS - Modello Gandini - Ruscitti	6
3.1 Discretizzazione di A_γ	8
3.2 Calcolo di $Pr[y > \gamma]$	10
3.3 Generazione Mappa Copertura del Sito	29
Bibliografia	30

1 Introduzione

Lo scopo di questo report è quello di mostrare lo stato di avanzamento del software che costruisce il modello Gandini-Ruscitti [1, 2] e di evidenziarne le criticità dal punto di vista implementativo.

Lo schema a blocchi ingresso-uscita del software è mostrato in Figura 1. Il software riceve in ingresso una serie di parametri provenienti da un *tool* di *planning* elettromagnetico che descrivono, per ogni pixel in cui è diviso il sito, la potenza ricevuta proveniente dalle stazioni-radio base circostanti, come essa sia suddivisa nei vari collegamenti e il rumore relativo alle celle (blocco blu).

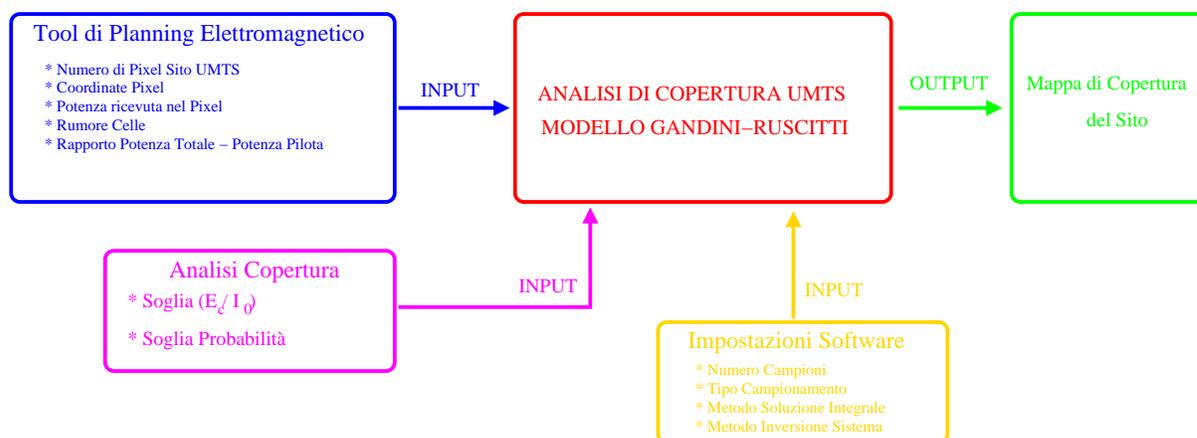


Figura 1: schema ingresso-uscita procedura di analisi di copertura UMTS - Modello Gandini-Ruscitti

Inoltre, allo scopo di costruire una mappa di copertura del sito in esame sono forniti i valori di soglia del rapporto segnale interferente (E_C/I_0) e della probabilità con cui tale soglia deve essere superata (blocco rosa) e i parametri che determinano il funzionamento del software (blocco giallo).

Questo lavoro è organizzato così da descrivere in modo accurato le scelte e le procedure adottate che permettono la costruzione della mappa di copertura; in particolare sono definiti i parametri d'ingresso (Sezione 2) ed è fornita una descrizione ad alto livello dei blocchi fondamentali (Sezione 3). I blocchi fondamentali sono poi analizzati in dettaglio, scomposti in sotto-blocchi e considerati nella loro specificità fornendo alcuni risultati preliminari (Sezioni 3.1, 3.2 e 3.3). Non essendo in possesso di dati in ingresso provenienti da *tool* di *planning* secondo standard, nei casi di studio considerati sono stati utilizzati quelli riportati da Gandini *et al.* in [1] che considerano il collegamento di un terminale mobile presente in un pixel con due celle. Ciò ha permesso un'analisi preliminare delle quantità in gioco evidenziando possibili criticità del modello e fornendo spunti per un'implementazione efficiente.

2 Dati in Ingresso

I dati in ingresso possono essere divisi in tre gruppi a seconda del ruolo che rivestono all'interno del software: (a) quelli che provengono dal software di planning elettromagnetico che verranno processati, (b) i valori di soglia del rapporto segnale-interferente e della probabilità che essa venga superata che riguardano l'analisi del sito *UMTS* e (c) i parametri che determinano il funzionamento del software.

2.1 Dati in Ingresso - Tool Planning Elettromagnetico

I dati d'ingresso provenienti dal software di planning elettromagnetico contengono la descrizione del sito *UMTS* che si andrà ad analizzare. In particolare, definiamo le seguenti quantità:

- numero di pixel in cui è diviso il sito: J .
- per ciascun pixel: $j = 1, \dots, J$
 - coordinate geografiche del pixel: $\underline{G} = (g_1^j, g_2^j)$.
 - numero di celle con cui il pixel è in comunicazione: N^j .
 - valore medio delle potenze della celle che trasmettono nel pixel: $\underline{X}^j = (x_1^j, \dots, x_{N^j}^j)$ [dBm].
 - rapporti Potenze Pilota su Potenza Totale: $[P]^j = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N^j} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N^j1} & \dots & a_{N^jN^j} \end{bmatrix}$.
 - rumore delle celle in comunicazione con il pixel: $\underline{C}^j = (c_1, \dots, c_{N^j})$.

2.2 Dati in Ingresso - Analisi Copertura UMTS del Sito

La copertura di un pixel secondo la definizione proposta in [1], esprime tale in concetto in termini di valore di rapporto segnale-interferente e probabilità. In particolare, un pixel si dice coperto se il rapporto segnale-interferente ottenuto supera una data soglia γ con probabilità maggiore di una determinata probabilità P_{thr} . I dati che riguardano l'analisi del sito *UMTS* e che sono utilizzati nella determinazione della copertura del pixel sono dunque:

- Valore di soglia per il rapporto segnale-interferente: γ [dBm].
- Valore di soglia di probabilità che il rapporto segnale-interferente superi la soglia γ : P_{thr} .

2.3 Dati in Ingresso - Parametri Software

In questo gruppo sono raccolti tutti i parametri che determinano il funzionamento del software, e che riguardano le modalità con cui sono risolte le espressioni presenti nel modello. E' un insieme in evoluzione, che varia in base alle problematiche affrontate e alle scelte adottate per superarle.

- Numero di campioni per la discretizzazione: M .
- Tipo di campionamento.
- Metodologia di soluzione dell'integrale.
- Metodologia inversione sistema.

3 Procedura per l'Analisi di Copertura UMTS - Modello Gandini - Ruscitti

In questa parte del lavoro sono riportate le equazioni alla base del modello Gandini-Ruscitti [1, 2] per l'analisi e la stima di coperture *UMTS*. Tali equazioni risultano di fondamentale importanza per comprendere quali sono le parti principali che compongono il software. A questo scopo consideriamo un sito d'indagine, diviso in J sotto-aree di dimensione costante chiamate pixel. La copertura di un pixel j -esimo è verificata attraverso la seguente disuguaglianza:

$$Pr [y^j > \gamma] > P_{thr}, \quad (1)$$

dove l'equazione (1) indica che un pixel è coperto se il rapporto segnale-interferente y^j supera γ con probabilità superiore a P_{thr} . La quantità descritta in (1) si calcola come:

$$Pr [y^j > \gamma] = 1 - Pr [y^j < \gamma] = 1 - \int_0^{A_\gamma} p_{y^j} (y_1^j, \dots, y_{N^j}^j) dy_1^j \dots dy_{N^j}^j, \quad (2)$$

dove nella parte destra dell'equazione (2) p_{y^j} è la funzione densità di probabilità della funzione y^j , definita come:

$$y^j = \max (y_1^j, \dots, y_{N^j}^j) \quad (3)$$

ed è dunque il massimo tra i rapporti segnali-interferente relativi ai collegamenti tra il terminale mobile presente nel j -esimo pixel e le N^j celle che trasmettono nel pixel. A_γ invece è un opportuno dominio di integrazione che dipende dalla soglia γ .

Poichè la funzione p_{y^j} non è nota a priori il calcolo di (2) è reso possibile attraverso un cambio di variabile. In particolare, vale:

$$\int_0^{A_\gamma} p_{y^j} (y_1^j, \dots, y_{N^j}^j) dy_1^j \dots dy_{N^j}^j = \int_0^{A_\gamma} p_{x^j} (G (y_1^j, \dots, y_{N^j}^j)) \det J_G dy_1^j \dots dy_{N^j}^j \quad (4)$$

dove, nella parte destra di (4) p_{x^j} è la densità di probabilità della potenza del segnale ricevuta nel j -esimo pixel, è nota, ed assume la forma di gaussiana N -dimensionale (con N numero di celle che trasmettono nel pixel), mentre G è la funzione che mappa il rapporto segnale-interferente $\underline{Y}^j = (y_1^j, \dots, y_{N^j}^j)$ con i corrispondenti valori di potenza ricevuti nel pixel $\underline{X}^j = (x_1^j, \dots, x_{N^j}^j)$, e dunque vale:

$$\underline{X}^j = G (\underline{Y}^j). \quad (5)$$

Poichè non è possibile ottenere una forma analitica per la funzione G gli elementi di \underline{X}^j sono calcolati mediante l'inversione del sistema:

$$\underline{X}^j = 10 \log \left[\left(A^j \right)^{-1} \underline{B}^j \right], \quad (6)$$

dove A^j e \underline{B}^j sono descritti in [1, 2]. Le espressioni (1), (2) e (6) indicano quali sono i blocchi principali del software, visualizzati in Figura 2:

- Discretizzazione del dominio di Integrazione A_γ .
- Calcolo dell'Integrale $Pr[y^j > \gamma]$, $j = 1, \dots, J$.
- Generazione della Mappa di Copertura.

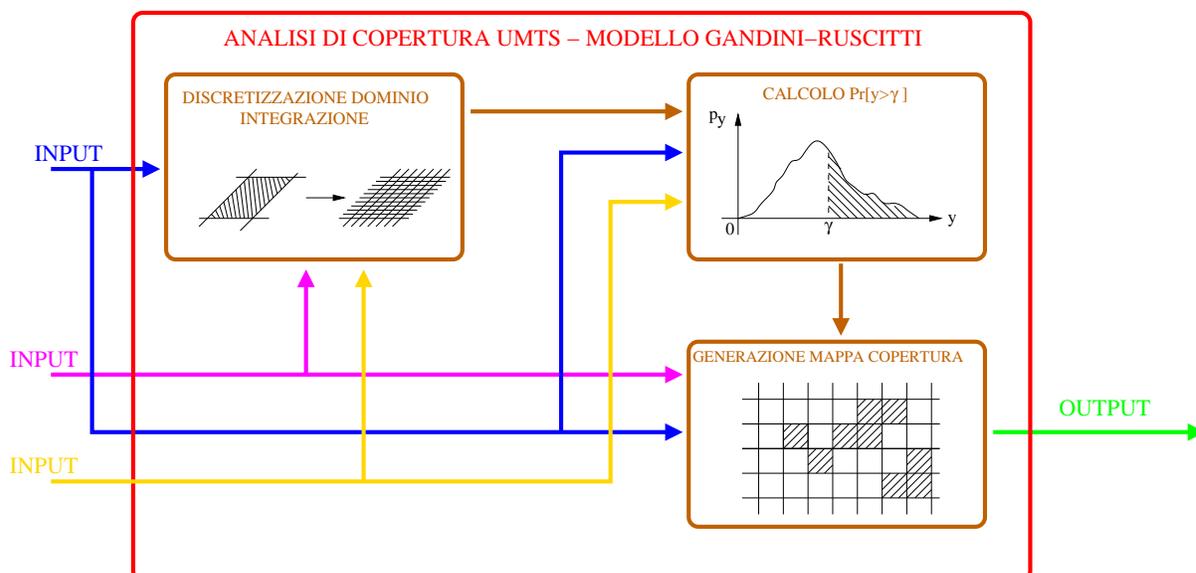


Figura 2: blocchi principali della procedura di analisi di copertura UMTS - Modello Gandini-Ruscitti

Ognuno dei tre blocchi è analizzato sia ad alto livello descrivendone le quantità in ingresso e in uscita che nel dettaglio descrivendo funzioni e *subroutine* FORTRAN implementate. Inoltre, sono forniti una serie di risultati preliminari che giustificano le scelte fatte o che sono alla base dello sviluppo del codice.

3.1 Discretizzazione A_γ

La discretizzazione del dominio di integrazione di A_γ è effettuata utilizzando la *subroutine* FORTRAN **DISCRETIZZA_SPAZIO_RASTER** i cui elementi fondamentali sono di seguito riportati.

Nome Subroutine: DISCRETIZZA_SPAZIO_RASTER

Descrizione:

La *subroutine* **DISCRETIZZA_SPAZIO_RASTER** ha lo scopo di discretizzare il dominio di integrazione A_γ . In dettaglio, A_γ contiene tutti gli elementi dello spazio $\underline{Y} \in \mathbf{Y}$, tali per cui vale:

$$\underline{Y} \in A_\gamma \Leftrightarrow y_n < \gamma \quad n = 1, \dots, N \quad (7)$$

dove la condizione (7) descrive i vettori appartenenti a A_γ come quelli tali per cui ogni loro elemento ha valore inferiore a γ . La *subroutine* campiona ognuna delle N componenti degli $\underline{Y} \in A_\gamma$ con il seguente passo di discretizzazione, Δy :

$$\Delta y = \frac{\gamma}{M}, \quad (8)$$

dove, in (8) M è il numero di intervalli in cui è suddivisa ogni componente di \underline{Y} . Successivamente sono generate N sequenze di $M + 1$ campioni \widehat{y}_n come:

$$\widehat{y}_n = \{y_n^{m_n} = m_n \Delta y; m_n = 0, \dots, M\}; n = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Le sequenze sono utilizzate per generare i campioni di A_γ la cui espressione vale:

$$\underline{Y}^s = (y_1^{m_1}, \dots, y_N^{m_N}); m_{1,\dots,N} = 0, \dots, M. \quad (10)$$

L'equazione (10) indica che gli $\underline{Y}^s \in A_\gamma$ sono generati considerando tutte le combinazioni di lunghezza N degli $M + 1$ elementi delle sequenze \widehat{y}_n . Il dominio di integrazione è dunque discretizzato in $(M + 1)^N$ campioni di lunghezza N . Nel proseguo del lavoro, si utilizzerà l'indice $k = 1, \dots, K = (M + 1)^N$ come indice dei campioni, per cui $(\underline{Y}^s)_k$ indicherà il k -esimo campione. Inoltre, la totalità dei campioni è indicata negli schemi a blocchi con $\sum \underline{Y}^s$.

Dati in Ingresso:

- **DIMENSIONE:** numero intero che indica la dimensione dello spazio da discretizzare.
 $DIMENSIONE = N$.

- *LIMITI INFERORI*: vettore di numeri reali $N \times 1$ i cui elementi indicano il valore minimo assunto dai campioni $(\underline{Y}^s)_k$; $k = 1, \dots, K$. $\underline{L} = (0, \dots, 0)$.
- *LIMITI SUPERIORI*: vettore di numeri reali $N \times 1$, i cui elementi indicano il valore massimo assunto dai campioni $(\underline{Y}^s)_k$; $k = 1, \dots, K$. $\underline{S} = (\gamma, \dots, \gamma)$.
- *NUMERO CAMPIONI*: numero intero che definisce il numero di campioni per la singola componente y_n ; $n = 1, \dots, N$. *NUMERO CAMPIONI* = M

Dati in Uscita:

- *SPAZIO_CAMPIONATO_RASTER*: vettore di numeri reali $1 \times (M + 1)^N$ contenente tutti i campioni di A_γ secondo lo standard RASTER: $(\underline{Y}^s)_1, \dots, (\underline{Y}^s)_K$.

Osservazioni:

Il campionamento finora implementato è di tipo uniforme, cioè lo spazio \mathbf{Y} è campionato utilizzando Δy di valore costante. Questa scelta è dettata dalla semplicità implementativa ma potrebbe essere non adeguata al fine di calcolare la funzione $p_y(\underline{Y}^s) = p_x(G(\underline{Y}^s)) \det J_G$ (si veda in dettaglio la sezione 3.2.3) in quanto il calcolo di $G(\underline{Y}^s)$ comporta una trasformazione dallo spazio \mathbf{Y} allo spazio \mathbf{X} di tipo logaritmico, non lineare. Una scelta differente propone l'utilizzo di Δy non costante e che abbia un andamento logaritmico, discretizzando in modo più fine (Δy di minor valore) valori delle componenti di \underline{Y}^s più elevate ed in modo più grossolano (Δy di maggior valore) quelle meno elevate.

3.2 Calcolo $Pr[y > \gamma]$

Il calcolo della quantità $Pr[y > \gamma]$ è effettuato risolvendo l'espressione (2) per ogni pixel che compone la mappa di copertura del sito. Lo schema a blocchi della procedura è mostrato in Figura 3.

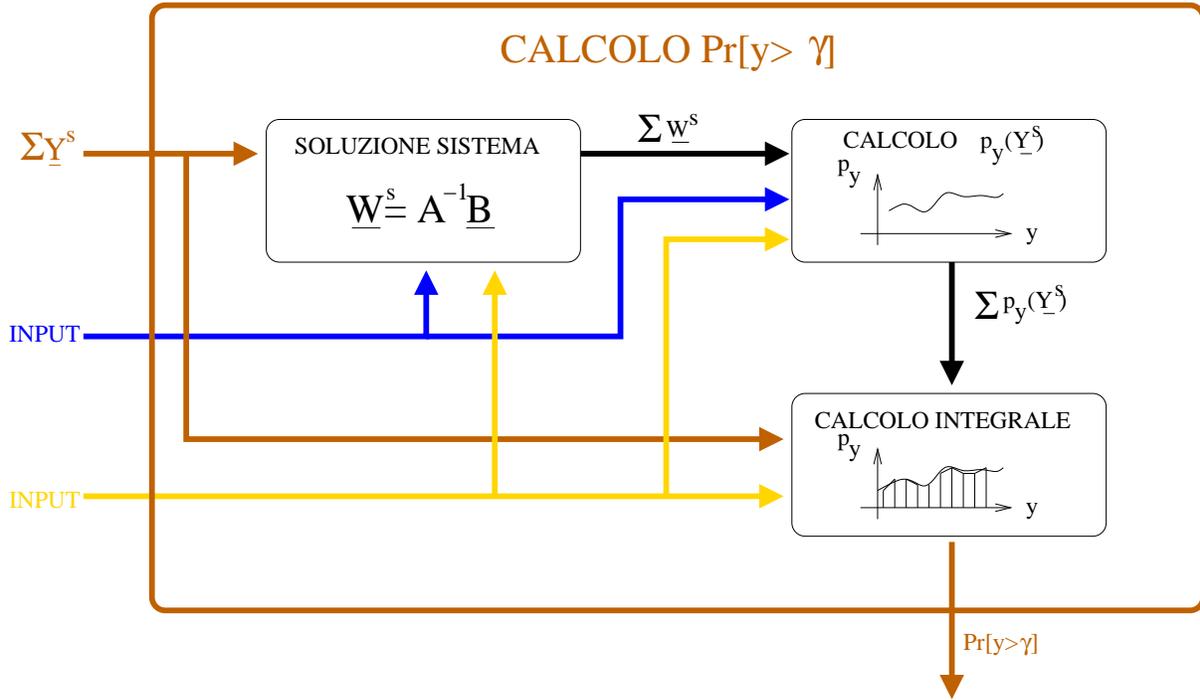


Figura 3: calcolo $Pr[y > \gamma]$ - schema a blocchi con relazioni ingresso-uscita

Il codice che permette il calcolo di $Pr[y > \gamma]$ è diviso in tre blocchi principali: partendo da un campione \underline{Y}^s ottenuto mediante il processo di discretizzazione (Sezione 3.2.1), si ottiene il corrispondente valore \underline{W}^s mediante la soluzione di un sistema lineare di equazioni (i), tale valore è utilizzato per il calcolo della funzione $p_y(\underline{Y}^s)$ (ii) che viene successivamente integrata (iii).

3.2.1 Soluzione del Sistema $[A] \underline{W}^s = \underline{B}$

La soluzione del sistema avviene secondo lo schema proposto in Figura 4. Il blocco riceve in ingresso i campioni dello spazio A_γ , $(\underline{Y}^s)_k$ $k = 1, \dots, K$ e, per ogni pixel, il numero di celle che vi trasmettono N^j ; $j = 1, \dots, J$, la matrice associata al rapporto delle potenze tra segnale pilota e totale $[P]^j$; $j = 1, \dots, J$, il rumore legato alle celle che trasmettono nel pixel \underline{C}^j ; $j = 1, \dots, J$. Tale blocco può essere diviso in tre sotto-blocchi:

- costruzione della matrice $[A]$;
- costruzione del vettore \underline{B} ;

- inversione del sistema $\underline{W} = [A]^{-1} \underline{B}$.

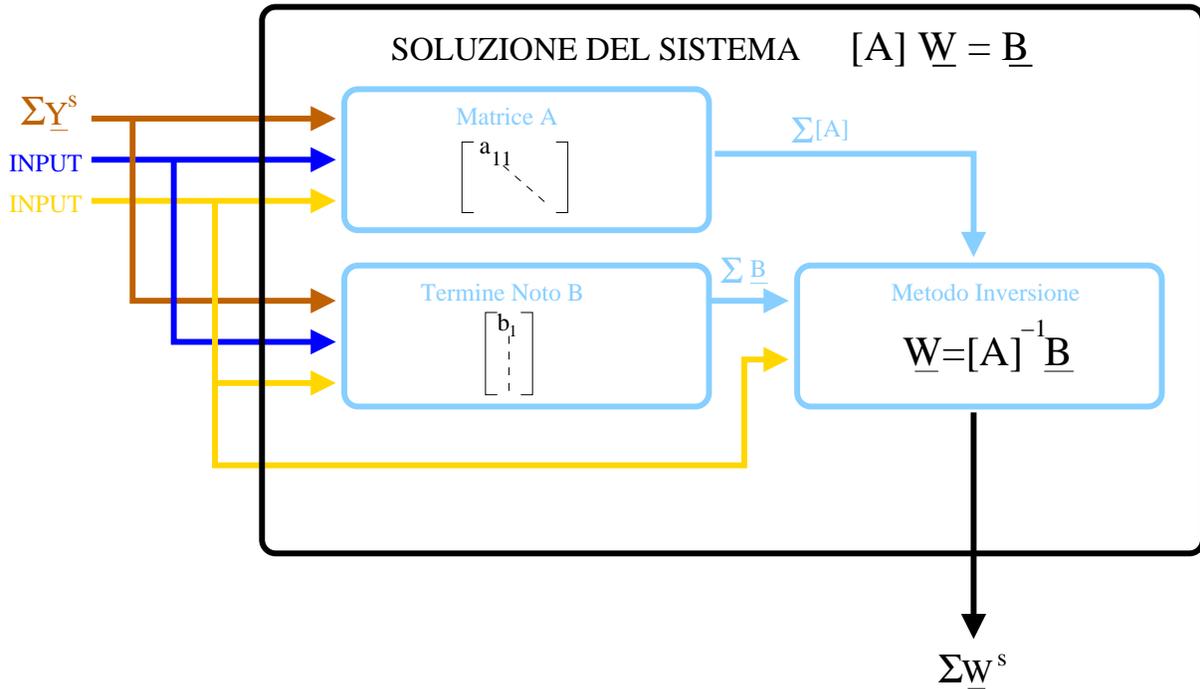


Figura 4: soluzione del sistema - schema a blocchi con relazioni ingresso uscita

Creazione della Matrice $[A]$

La creazione della matrice $[A]$ è ottenuta mediante l'utilizzo della subroutine FORTRAN **CREA_MATRICE_SISTEMA** i cui elementi fondamentali sono riportati in seguito.

Nome Subroutine: **CREA_MATRICE_SISTEMA**

Descrizione:

La subroutine **CREA_MATRICE_SISTEMA** ha lo scopo di costruire la matrice A associata al sistema da risolvere. Per ciascun campione $(\underline{Y}^s)_k$; $k = 1, \dots, K$ essa implementa la seguente espressione:

$$A = \begin{bmatrix} (y_1^s a_{11} - 1) & \dots & y_1^s a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_N^s a_{N1} & \dots & (y_N^s a_{NN} - 1) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

dove in (11) (y_1^s, \dots, y_N^s) sono le componenti del campione (\underline{Y}^s) mentre a_{nm} ; $n = 1, \dots, N$; $m = 1, \dots, N$ sono gli elementi della matrice $[P]$.

Dati in Ingresso:

- N_DIM : numero intero che indica la dimensione della matrice. $N_DIM = N$.
- $POWER$: matrice di numeri reali $N \times N$. $POWER = [P]$.
- Y_VECTOR : vettore di numeri reali $N \times 1$, $Y_VECTOR = (\underline{Y}^s)$.

Dati in Uscita:

- A_MATRIX : matrice di numeri reali $N \times N$. $A_MATRIX = [A]$.

Creazione Termine Noto \underline{B}

La creazione del termine noto \underline{B} è ottenuta mediante l'utilizzo della *subroutine* FORTRAN **CREA_TERMINE_NOTO** i cui elementi fondamentali sono riportati in seguito.

Nome Subroutine: CREA_TERMINE_NOTO**Descrizione:**

La *subroutine* **CREA_TERMINE_NOTO** ha lo scopo di costruire il vettore termine noto \underline{B} associato al sistema da risolvere. Per ciascun campione $(\underline{Y}^s)_k$; $k = 1, \dots, K$ essa implementa la seguente espressione:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -y_1^s c_1 \\ \vdots \\ -y_N^s c_N \end{bmatrix}; \quad (12)$$

dove in (12) (y_1^s, \dots, y_N^s) sono le componenti del campione (\underline{Y}^s) mentre (c_1, \dots, c_N) sono gli elementi del vettore \underline{C} .

Dati in Ingresso:

- N_DIM : numero intero che indica il numero di righe di \underline{B} . $N_DIM = N$.
- $NOISE$: vettore di numeri reali $N \times 1$. $NOISE = \underline{C}$.
- Y_VECTOR : vettore di numeri reali $N \times 1$, $Y_VECTOR = (\underline{Y}^s)$.

Dati in Uscita:

- B_VECTOR : vettore di numeri reali $N \times 1$. $B_VECTOR = \underline{B}$.

3.2.2 Studio della Matrice $[A]$

Per individuare la tecnica più appropriata alla soluzione del sistema è necessario uno studio approfondito della matrice in $[A]$. Allo scopo di quantificare l'instabilità connessa al problema definiamo il numero di condizionamento di $[A]$ η come:

$$\eta = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \quad (13)$$

dove nell'equazione (13) λ_{max} e λ_{min} sono rispettivamente gli autovalori di $[A]$ di valore massimo e minimo. Il numero di condizionamento η dà un'indicazione della misura in cui un sistema lineare risente dell'incertezza dei dati in ingresso e dunque fornisce un'informazione sulla precisione dei risultati che si ottengono risolvendo il sistema lineare mediante l'inversione della matrice. Quantitativamente parlando, valori prossimi ad 1 indicano che la matrice è ben condizionata mentre valori $\gg 1$ sono indice di malcondizionamento.

Lo studio di η della matrice $[A]$ avviene mediante il caso di test in cui un terminale mobile presente nel pixel j -esimo è connesso con $N = 2$ celle.

Caso di Test

- Numero di celle che trasmettono nel pixel: $N = 2$.
- $a_{11} = a_{12} = 3.6058$. $\frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{a_{12}} = 0.2773$.
- $a_{21} = a_{22} = 3.4754$. $\frac{1}{a_{21}} = \frac{1}{a_{22}} = 0.2877$.
- $[P] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6058 & 3.6058 \\ 3.4754 & 3.4754 \end{bmatrix}$.
- $[A] = \begin{bmatrix} a_{11}y_1^s - 1 & a_{12}y_1^s \\ a_{21}y_2^s & a_{22}y_2^s - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6058y_1^s - 1 & 3.6058y_1^s \\ 3.4754y_2^s & 3.4754y_2^s - 1 \end{bmatrix}$.
- $(\underline{Y}^s)_k = \{(y_1^s, y_2^s)_k \in \mathbf{Y} : y_1^s < 0.2773, y_2^s < 0.2877; k = 1, \dots, K\}$.
- Numero campioni per componente di \underline{Y}^s : $(M + 1) = 50$.
- Numero totale di Campioni: $M^N = 50^2 = 2500$.

Risultati

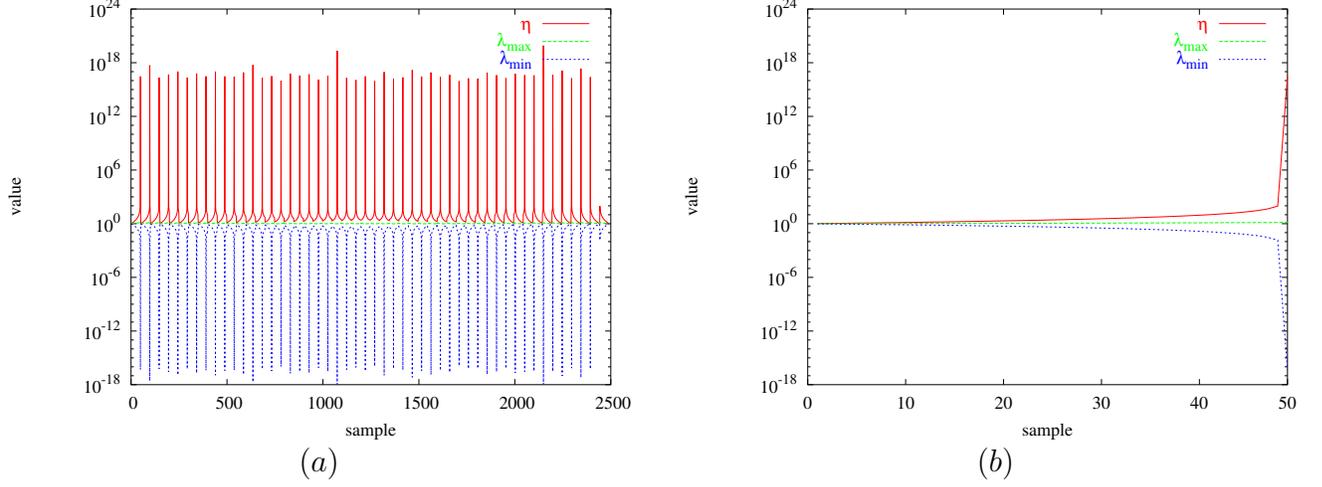


Figura 5: studio della matrice $[A]$ - λ_{max} , λ_{min} e η

Osservazioni

I risultati ottenuti sono mostrati in Figura 5 (a) e (b) e riguardano nel primo caso la totalità dei campioni mentre nel secondo si è scelto di sottolineare l'andamento di λ_{max} , λ_{min} e η nei primi 50 campioni. Si nota come η assuma valori elevati quando $y_1^s \sim \frac{1}{a_{11}}$ e $y_2^s \sim \frac{1}{a_{22}}$, nell'ordine di 1×10^{18} ed indicando un malcondizionamento della matrice $[A]$.

Allo scopo di valutare di analiticamente il comportamento di η calcoliamo le espressioni degli autovalori λ_{max} e λ_{min} come radici del polinomio caratteristico associato ad $[A]$, calcolate risolvendo la seguente equazione:

$$\det |[A] - \lambda [I]| = 0 \quad (14)$$

dove in (14) $[I]$ è la matrice identità mentre λ sono gli autovalori di $[A]$. Sostituendo la definizione di $[A]$ si ottiene:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}y_1^s - 1 - \lambda & a_{12}y_1^s \\ a_{21}y_2^s & a_{22}y_2^s - 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

da cui segue la seguente equazione:

$$(a_{11}y_1^s - 1 - \lambda)(a_{22}y_2^s - 1 - \lambda) - (a_{12}y_1^s)(a_{21}y_2^s) = 0. \quad (16)$$

Ponendo $a_{11} = a_{12} = k_1$ e $a_{21} = a_{22} = k_2$ vale:

$$(k_1 y_1^s - 1 - \lambda)(k_2 y_2^s - 1 - \lambda) - (k_1 y_1^s)(k_2 y_2^s) = 0, \quad (17)$$

dopo alcuni passaggi matematici si ottiene:

$$\lambda^2 + \lambda(2 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s) + (1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s) = 0. \quad (18)$$

Risolvendo per l'incognita λ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{(k_1 y_1^s + k_2 y_2^s - 2) \pm \sqrt{(2 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)^2 - 4(1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)}}{2}, \quad (19)$$

da cui si ottengono le due espressioni per λ_{max} e λ_{min} :

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \frac{(k_1 y_1^s + k_2 y_2^s - 2) + \sqrt{(2 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)^2 - 4(1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)}}{2} \\ \lambda_{min} &= \frac{(k_1 y_1^s + k_2 y_2^s - 2) - \sqrt{(2 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)^2 - 4(1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)}}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Ricordando la definizione di η (13) si impone la condizione di esistenza:

$$\lambda_{min} \neq 0 \quad (21)$$

da cui segue:

$$(k_1 y_1^s + k_2 y_2^s - 2) - \sqrt{(2 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)^2 - 4(1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)} \neq 0. \quad (22)$$

Si nota come la condizione (22) è garantita se vale:

$$(1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s) \neq 0 \quad (23)$$

Inoltre la matrice $[A]$ è definita positiva[1] per cui i suoi autovalori devono essere maggiori di 0; da questo segue:

$$(k_1 y_1^s + k_2 y_2^s - 2) - \sqrt{(2 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)^2 - 4(1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s)} \geq 0 \quad (24)$$

che porta alla condizione:

$$(1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s) \geq 0 \quad (25)$$

utilizzando le condizioni (23) e (25) si ottiene:

$$(1 - k_1 y_1^s - k_2 y_2^s) > 0 \quad (26)$$

da cui segue:

$$k_1 y_1^s + k_2 y_2^s < 1 \quad (27)$$

La condizione (27) indica il dominio di esistenza della funzione G e soprattutto porta ad una nuova definizione dei vettori $\underline{Y} \in A_\gamma$ come:

$$A_\gamma = \{(y_1, y_2) \mid y_1 < \gamma; y_2 < \gamma; k_1 y_1^s + k_2 y_2^s < 1\}.$$

Il calcolo di η ai campioni $(\underline{Y}^s)_k; k = 1, \dots, K$ per cui vale la (27) è mostrato in Figura 6. Il valore massimo di η è circa 30 rispetto ad un $\eta \sim 10^{17}$ nel caso precedente. In ogni caso sarà necessario l'utilizzo di tecniche di inversione sofisticate, diverse da quelle classiche, allo scopo di garantire l'accuratezza della soluzione.

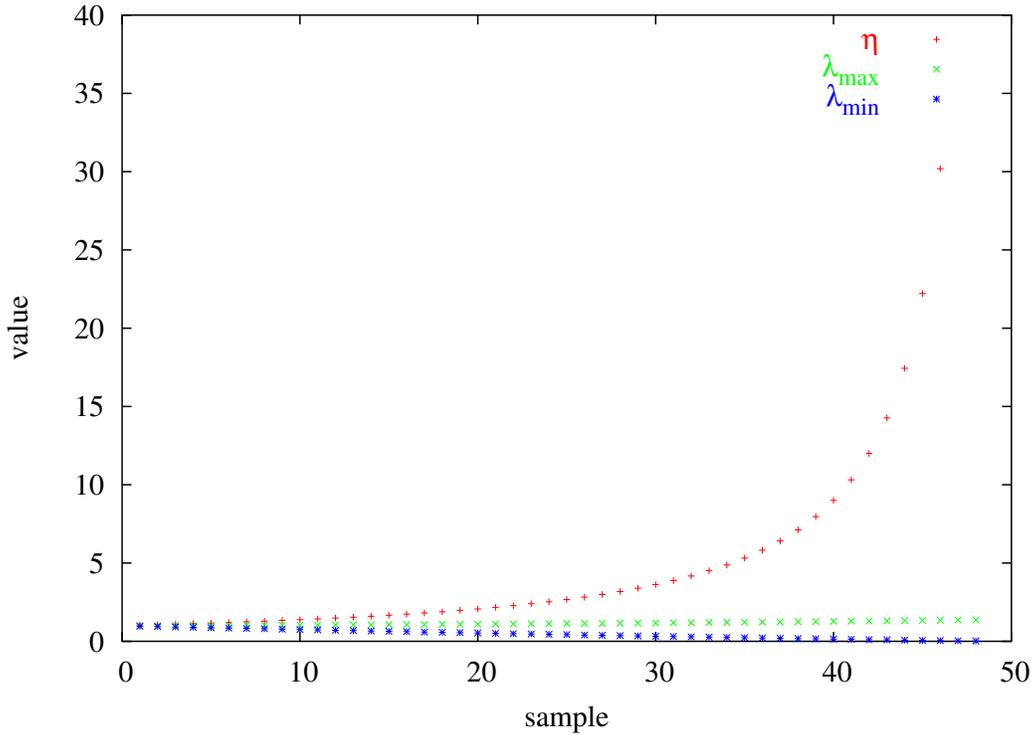


Figura 6: studio della matrice $[A]$ - λ_{\max} - λ_{\min} - η - per \underline{Y}^s per cui vale la (27)

3.2.3 Calcolo Funzione $p_y(\underline{Y}^s)$

Il calcolo del valore della funzione è ottenuto secondo il procedimento descritto in Figura 7 ed implementa la seguente espressione:

$$p_y(\underline{Y}^s) = p_x(\underline{X}^s) \det J_G \quad (28)$$

dove nell'equazione (28), \underline{Y}^s è un campione dello spazio A_γ , $\underline{X}^s = 10 \log_{10} G(\underline{Y}^s)$ è il valore di potenza dei collegamenti pixel-celle associato ad \underline{Y}^s e $\det J_G$ è il determinante della funzione G .

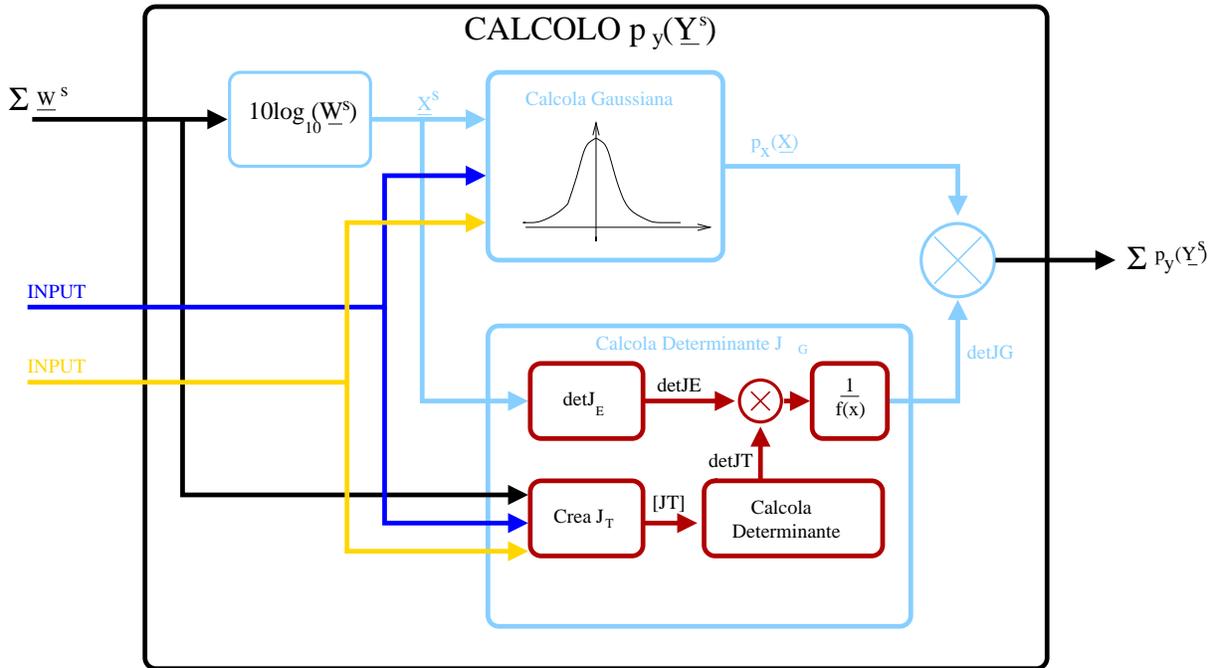


Figura 7: calcolo $p_y(\underline{Y}^s)$ - schema a blocchi con relazioni ingresso-uscita

Si noti come i blocchi principali sono due: (a) il calcolo del valore di una gaussiana N -dimensionale nel campione $\underline{X}^s = (x_1^s, \dots, x_N^s)$ e (b) il calcolo del determinante della matrice Jacobiana di G , $\det J_G$. Questi blocchi sono descritti nelle seguenti sezioni, evidenziando i parametri d'ingresso e d'uscita, le espressioni che vanno ad implementare e mostrando alcuni risultati preliminari.

Calcolo Gaussiana N -dimensionale

Il calcolo dei valori che gaussiana N -dimensionale è ottenuto attraverso la funzione FORTRAN `N_DIM_GAUSS`, i cui elementi fondamentali sono di seguito riportati.

Nome Subroutine: N_DIM_GAUSS

Descrizione:

La subroutine **N_DIM_GAUSS** ha lo scopo di calcolare il valore di una gaussiana N -dimensionale in un punto. In dettaglio, essa implementa la seguente espressione:

$$p_x(\underline{X}^s) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det \Sigma^{1/2}} \exp -\frac{1}{2} [\underline{X}^s - \underline{\mu}]^t \Sigma^{-1} [\underline{X}^s - \underline{\mu}] \quad (29)$$

dove nell'equazione (29) N è la dimensione della gaussiana e corrisponde al numero di celle che trasmettono nel pixel, $\underline{\mu}$ è il vettore dei valori medi, Σ , Σ^{-1} e $\det \Sigma$ sono rispettivamente la matrice di covarianza, la sua inversa e il suo determinante.

Dati in Ingresso:

- N_DIM : numero reale che indica la dimensione della gaussiana. $N_DIM = N$.
- MU : vettore di numeri reali valori medi $N \times 1$, i cui valori rappresentano la potenza trasmessa dalle celle nel pixel considerato, calcolati dal *tool* di *planning* elettromagnetico. $MU = \underline{\mu} = \underline{X}$.
- $SIGMA$: matrice di numeri reali, $N \times N$, è la matrice di covarianza associata alla gaussiana. $SIGMA = \Sigma$.
- $INVSIGMA$: matrice di numeri reali, $N \times N$, è la matrice inversa della matrice di covarianza. $INVSIGMA = \Sigma^{-1}$.
- X_VECTOR : vettore di numeri reali $N \times 1$, i cui elementi sono calcolati mediante inversione del sistema in 3.2.1. $X_VECTOR = \underline{X}^s$.

Dati in Uscita:

- N_DIM_GAUSS : numero reale, è il valore della gaussiana N -dimensionale calcolato in X_VECTOR .

Risultati

Caso di Test (1):

- Dimensione gaussiana $N = 1$.
- Valore medio: $\mu = -94.06$ [dBm].
- Varianza: $\sigma^2 = 8$ [dBm].
- Valori calcolati: $\underline{X}^s = x_1^s \mid x_1^s \in (-\mu \pm \sigma^2) \ x_1^s \in (-128.06, -70.06)$ [dBm].
- Numero campioni: $M + 1 = 100$.

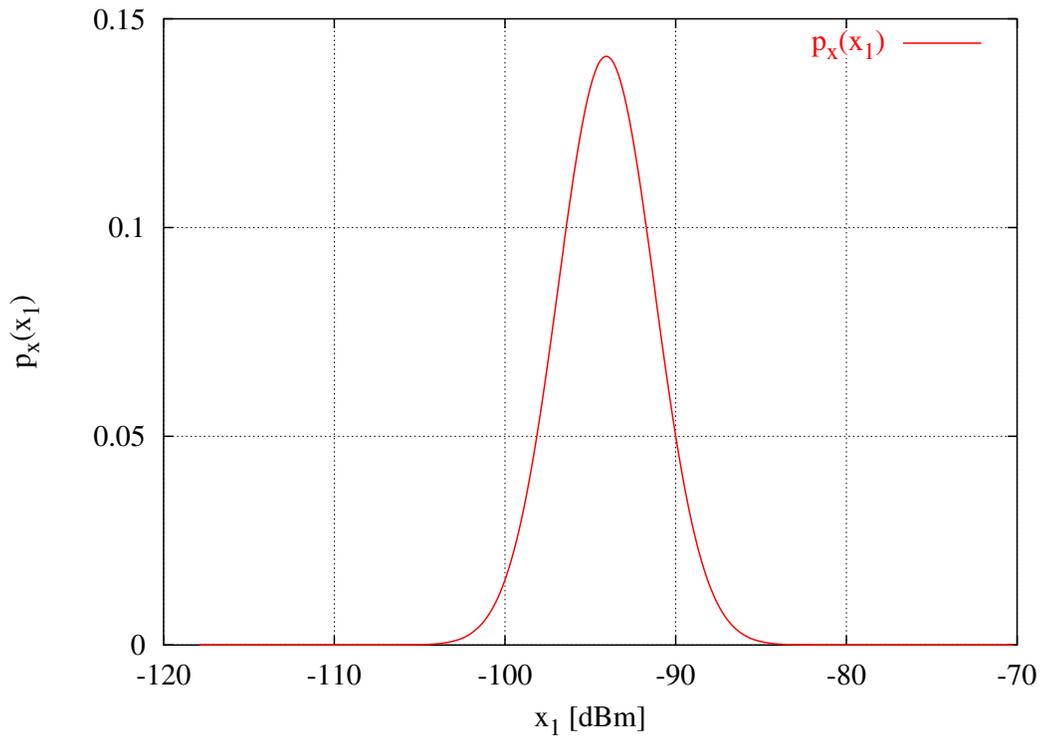


Figura 8: Caso di Test (1) - Gaussiana ottenuta dalla funzione N_DIM_GAUSS - $N = 1$

Caso di Test (2):

- Dimensione gaussiana $N = 2$.
- Valore medio: $\underline{\mu} = [-94.06, -95.26] [dBm]$.
- Matrice di covarianza: $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} [dBm]$.
- Valori calcolati: $\underline{X}^s = (x_1^s, x_2^s) \mid (x_1^s, x_2^s) \in (-\mu_1 \pm 3\sigma^2, -\mu_2 \pm 3\sigma^2), x_1^s \in (-128.06, -70.06) [dBm], x_2^s \in (-129.26, -71.26) [dBm]$.
- Numero campioni: $(M + 1)^N = 50^2 = 2500$.

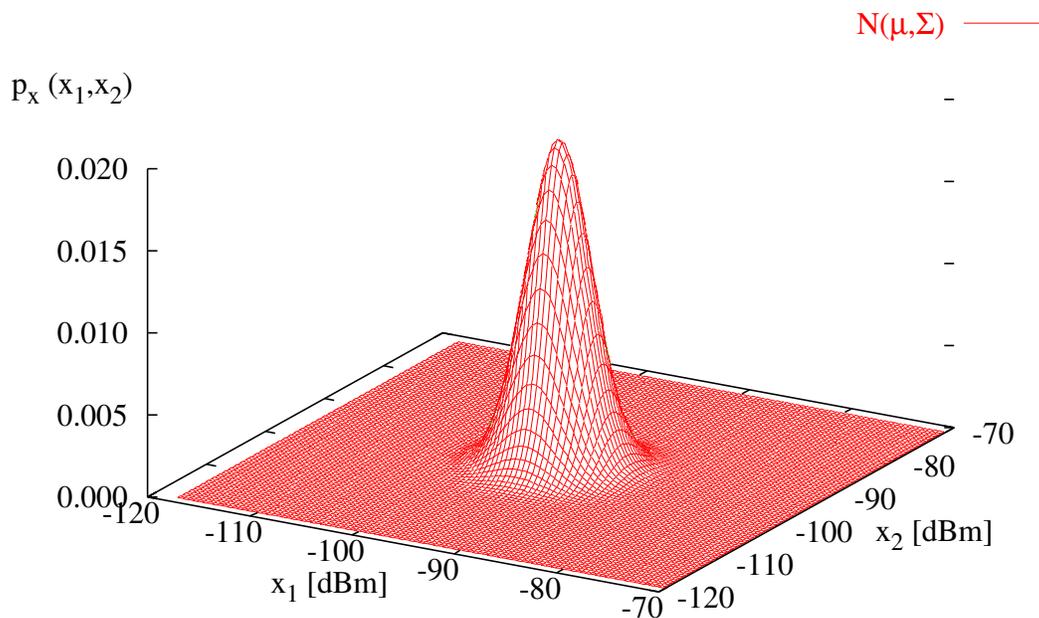


Figura 9: Caso di Test (2) - Gaussiana ottenuta dalla funzione `N_DIM_GAUSS` - $N = 2$

Osservazioni

I risultati ottenuti, visualizzati nelle Figure 8 e 9 mostrano come il calcolo del valore della gaussiana N -dimensionale non sembra portare a problemi di tipo numerico.

Calcolo Determinante di J_G

Il calcolo del determinante della funzione Jacobiana di G segue l'approccio descritto in [1], in cui sfruttando il teorema della funzione composta e quello della funzione inversa si ottiene:

$$\det J_G = \frac{1}{\det J_E \det J_T} \quad (30)$$

dove nell'equazione (30), $\det J_E$ e $\det J_T$ sono rispettivamente il determinante della funzione Jacobiana della funzione E e della funzione T [1].

Calcolo Determinante J_E

All'interno del software tale calcolo è effettuato dalla *subroutine* **DETERMINANTE_JE**, di seguito descritta.

Nome Subroutine: **DETERMINANTE_JE**

Descrizione:

Il calcolo del determinante della matrice Jacobiana, $\det J_E$ della funzione $E : X \rightarrow W$ [1] sfrutta le caratteristiche della matrice J_E in quanto essa è del tipo:

$$J_E = \frac{\ln 10}{10} \begin{bmatrix} 10^{x_1^s/10} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 10^{x_N^s/10} \end{bmatrix} \quad (31)$$

dove nell'equazione (31) (x_1^s, \dots, x_N^s) è un elemento dello spazio \mathbf{X} . Essendo la matrice di tipo diagonale, il determinante si calcola moltiplicando gli elementi presenti sulla diagonale; inoltre utilizzando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$\det J_E = \left(\frac{\ln 10}{10}\right)^N 10^{\sum_{n=1}^N \frac{x_n^s}{10}} \quad (32)$$

Dati in Ingresso

- N_DIM : numero intero che indica la dimensione della matrice. $N_DIM = N$.
- X_VECTOR : vettore di numeri reali, $N \times 1$: $X_VECTOR = \underline{X}^s$. I valori di X_VECTOR sono calcolati mediante la soluzione del sistema.

Dati in Uscita

- DET_JE : Numero reale, valore del determinante della funzione Jacobiana di E .
 $DET_JE = \det J_E$.

Calcolo Determinante di J_T

Il calcolo del determinante di J_T avviene in due passi: (a) è costruita la matrice J_T mentre successivamente (b) è calcolato il determinante. In particolare, la costruzione di J_T è implementata dalla *subroutine* FORTRAN **CREA_MATRICE_JT** mentre il calcolo del determinante è effettuato mediante la *subroutine* FORTRAN **DETERMINANTE**.

Nome Subroutine: **CREA_MATRICE_JT**

Descrizione:

La subroutine **CREA_MATRICE_JT** costruisce la matrice Jacobiana di $T : W \rightarrow Y$ definita come:

$$J_T = \begin{bmatrix} \frac{\delta y_1}{\delta w_1} & \cdots & \frac{\delta y_1}{\delta w_N} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\delta y_N}{\delta w_1} & \cdots & \frac{\delta y_N}{\delta w_N} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

calcolando gli elementi secondo le espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{\delta y_n}{\delta w_n} &= \frac{a_{n1}w_1 + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}w_{n(n-1)} + a_{(n+1)(n+1)}w_{n(n+1)} \cdots + a_{nN}w_N + c_n}{(d_n)^2}, \quad n = 1, \dots, N \\ \frac{\delta y_n}{\delta w_m} &= -\frac{a_{nm}w_n}{(d_n)^2}, \quad n, m = 1, \dots, N \quad n \neq m \\ d_n &= a_{n1}w_1 + \cdots + a_{nN}w_N + c_n; \quad n = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (34)$$

Dati in Ingresso

- N_DIM : numero intero che indica la dimensione della matrice . $N_DIM = N$.
- $POWER$: matrice di numeri reali $N \times N$. $POWER = [P]$.
- W_VECTOR : vettore di numeri reali, $N \times 1$. $W_VECTOR = \underline{W}$. I valori di W_VECTOR sono calcolati mediante la soluzione del sistema in 3.2.1.
- $NOISE$: vettore di numeri reali, $N \times 1$. $NOISE = \underline{C}$.

Dati in Uscita

- JT : matrice di numeri reali, $N \times N$. Matrice Jacobiana di T .

Nome Subroutine: DETERMINANTE

Descrizione:

La subroutine **DETERMINANTE** calcola il determinante di una matrice quadrata A $N \times N$ sfruttando la decomposizione LU . In dettaglio, la matrice A viene decomposta secondo l'espressione:

$$A = PLU \quad (35)$$

dove in (35) P è un matrice $N \times N$ detta matrice di permutazione, mentre L è una matrice triangolare inferiore definita come:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{N1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Infine, U è una matrice triangolare superiore definita come:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{(N-1)N} \\ 0 & \dots & \dots & u_{NN} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Il valore del determinante si ottiene sfruttando le proprietà delle matrici diagonali dalla seguente espressione:

$$\det A = \det P \det L \det U, \quad (38)$$

dove nell'espressione (38) $\det P$ è il determinante della matrice P e vale:

$$\det P = (-1)^S \quad (39)$$

con S numero di righe scambiate nel processo di decomposizione, mentre $\det L = 1$ visto che gli elementi sulla diagonale valgono tutti 1. Ricordando che A è una matrice definita positiva ($\det A > 0$) si ottiene:

$$\det A = \left| \prod_{n=1}^N l_{nn} \right| \quad (40)$$

Dati in Ingresso

- N_DIM : numero intero che indica la dimensione della matrice . $N_DIM = N$.
- A : matrice di numeri reali $N \times N$ di cui si calcola il determinante.

Dati in Uscita

- $DETA$: numero reale, determinante della matrice A .

Risultati

Caso di Test (1):

- Numero Celle $N = 1$.
- Valori calcolati: $\underline{X}^s = x^s \in (-128.06, -70.06)$ [dBm].
- Numero Campioni: $M = 100$.

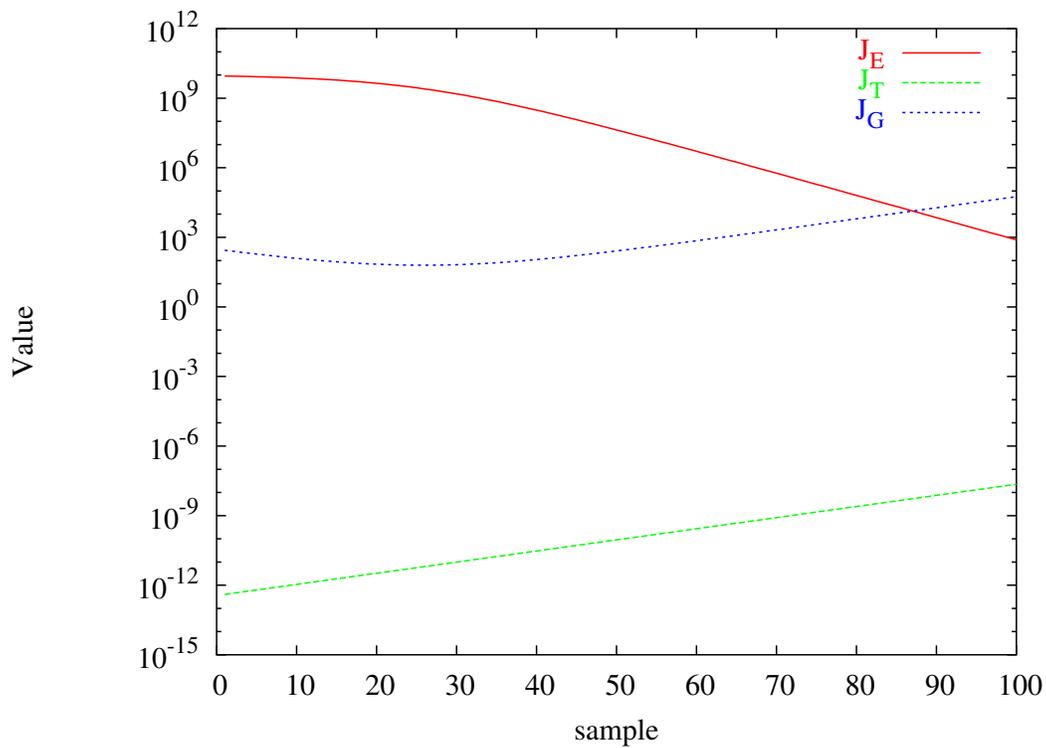


Figura 10: $\det J_E$ - $\det J_T$ - $\det J_G$ - $N = 1$

	$\det J_E$	$\det J_T$	$\det J_G$
max <i>value</i>	9.0135×10^9	2.2709×10^{-6}	6.2644×10^1
min <i>value</i>	7.7403×10^3	4.0199×10^{-11}	5.6888×10^4

Tabella I: valori massimi e minimi di $\det J_E$ - $\det J_T$ - $\det J_G$ - $N = 1$

Caso di Test (2):

- Numero Celle $N = 2$.
- Valori calcolati: $\underline{X} = (x_1, x_2) \mid (x_1, x_2), x_1 \in (-128.06, -70.06) [dBm], x_2 \in (-129.26, -71.26) [dBm]$
- Numero campioni: $M \times M = 50 \times 50 = 2500$.

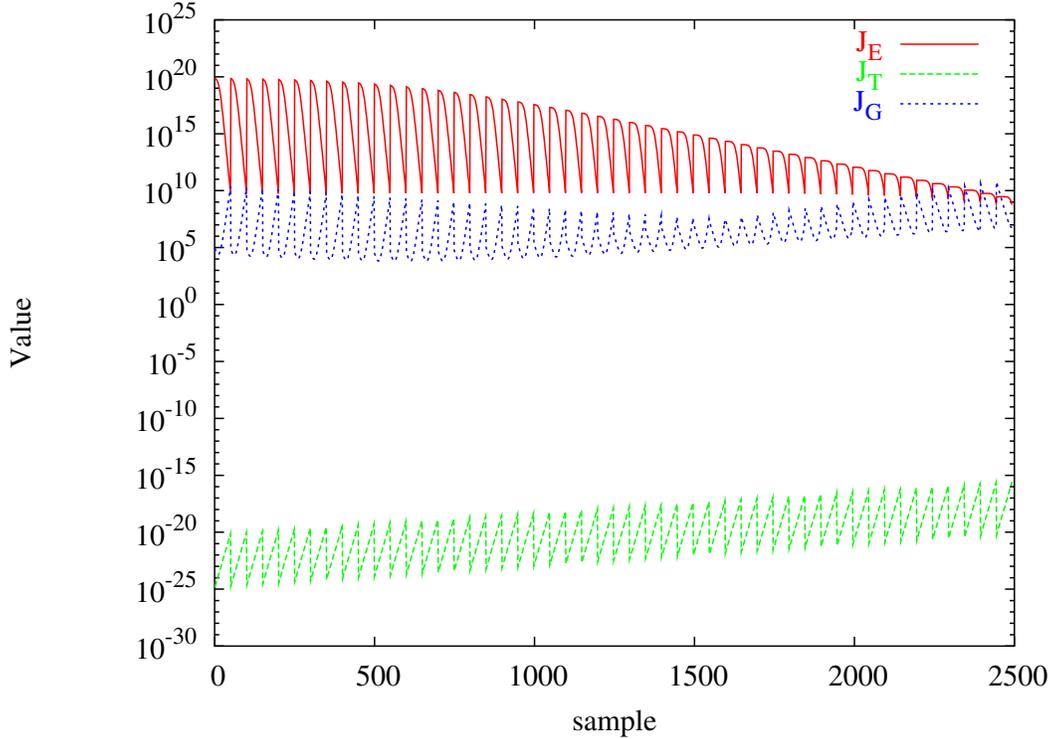


Figura 11: $\det J_E$ - $\det J_T$ - $\det J_G$ - $N = 2$

	$\det J_E$	$\det J_T$	$\det J_G$
max <i>value</i>	7.3391×10^{19}	3.9123×10^{-14}	5.7274×10^{10}
min <i>value</i>	4.2196×10^8	1.5290×10^{-23}	6.3906×10^3

Tabella II: valori massimi e minimi di $\det J_E$ - $\det J_T$ - $\det J_G$ - $N = 2$

Osservazioni

Come si nota dai grafici di Figura 10 e 11 e dai dati riportati nelle Tabelle I e II, il calcolo del determinante di J_G risulta critico per i valori delle grandezze in gioco, in particolare non si esclude, per valori di N elevati ($N \sim 10$) di problemi di *overflow* nel calcolo di $\det J_E$ e di approssimazione nel calcolo di $\det J_T$. Una possibile soluzione a tali problemi prevede il calcolo di $\det J_G$ secondo la formula:

$$\det J_G = \det |J_E J_T|^{-1} \quad (41)$$

Nell'equazione (41), $\det J_G$ è calcolato mediante la determinazione del determinante della matrice inversa $J_E J_T$. Seguendo questo approccio, i valori ottenuti mediante la moltiplicazione riga-colonna delle due matrici, hanno un range di valori inferiori, in quanto gli elementi di J_E (di valore elevato) sono compensati da quelli di J_T .

3.2.4 Calcolo Integrale $\int_{A_\gamma} p_y(\underline{Y}) dy_1 \dots, dy_N$

Le operazioni principali che portano al calcolo dell'integrale e successiva determinazione di $Pr[y > \gamma]$ sono mostrate in Figura 12. In dettaglio il calcolo di $\int_{A_\gamma} p_y(\underline{Y}) dy_1 \dots dy_N$ avviene utilizzando la seguente espressione:

$$\int_{A_\gamma} p_y(\underline{Y}) dy_1, \dots, dy_N = \sum_{k=1}^K p_y((\underline{Y}^s)_k) \Delta y_1 \dots \Delta y_N. \quad (42)$$

L'espressione (42) calcola l'integrale come sommatoria di elementi di volume finiti ottenuti moltiplicando il differenziale discretizzato con il valore della funzione $p_y(\underline{Y}^s)$.

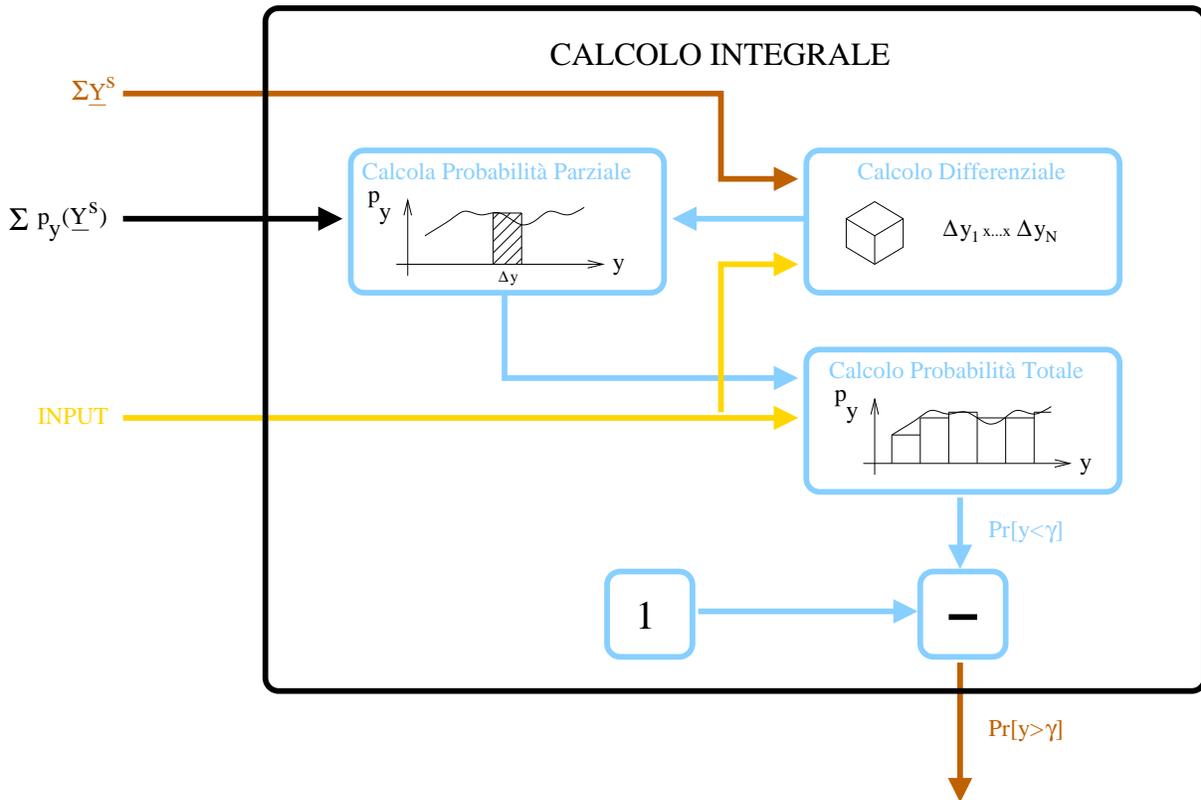


Figura 12: calcolo $\int_{A_\gamma} p_y(\underline{Y}^s) dy_1 \dots dy_N$ - schema a blocchi con relazioni ingresso-uscita

Nell'implementazione del codice si è scelto di utilizzare la tecnica di integrazione che utilizza la funzione a gradino [3] applicata al caso N -dimensionale. In questa tecnica il differenziale discretizzato è un iper-cubo di dimensione $N - 1$ mentre il valore di $p_y((\underline{Y}^s)_k)$ è il valore assunto dal k -esimo campione. Tale approccio permette un calcolo dell'integrale veloce e benchè presenti un errore superiore rispetto ad altre tecniche numeriche la velocità può essere sfruttata aumentando il numero di campioni.

3.3 Creazione della Mappa di Copertura del Sito

La costruzione della mappa di copertura avviene in due passi (Figura 2): (a) il valore precedentemente calcolato di $Pr[y > \gamma]$ è comparato con il valore di soglia di probabilità P_{thr} . Se vale $Pr[y > \gamma] > P_{thr}$ allora il pixel è coperto altrimenti il pixel è non coperto.

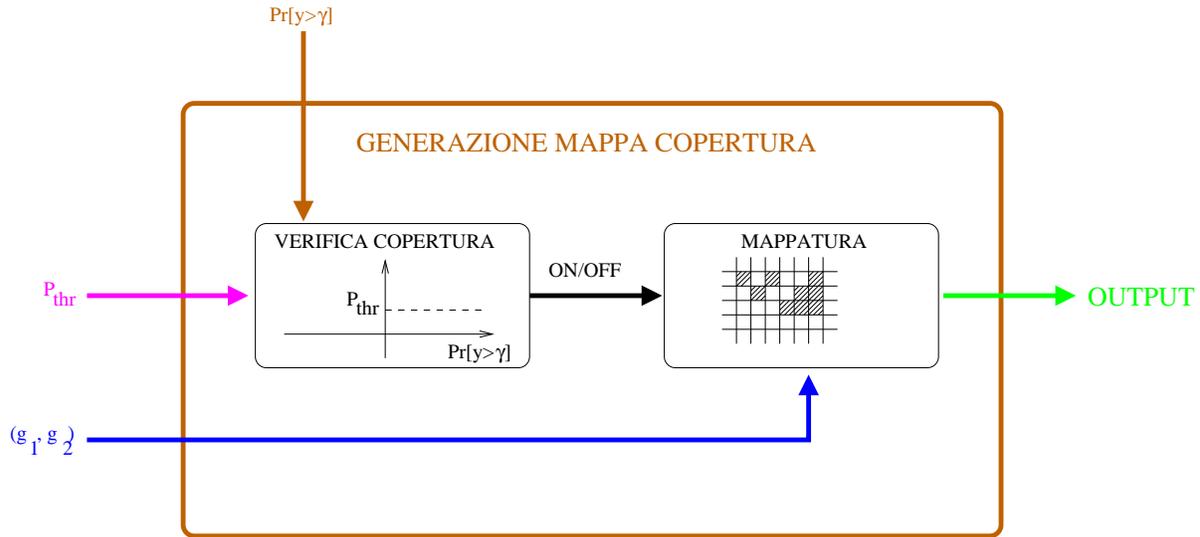


Figura 13: Creazione Mappa di Copertura - schema a blocchi con relazioni ingresso-uscita

Una volta determinata la copertura del pixel, tale valore è associato alla posizione geografica del pixel (b) (mappatura) così da ottenere la distribuzione spaziale della copertura. Considerando tutti i pixel che compongono il sito si arriva dunque alla creazione della mappa di copertura che costituisce l'uscita del software.

References

- [1] L. Gandini and G. Ruscitti, “A New Method for Estimation of UMTS Coverage Areas by Planning Tool,” *Internal Report VODAFONE Italia*, 2008.
- [2] L. Manica, “Studio ed Implementazione di un Modello per l’Analisi e della Stima di Coperture UMTS,” Report no. 1, *Gruppo ELEDIA*, Università di Trento, Agosto 2008.
- [3] V. Comincioli, *Analisi Numerica: metodi, modelli, applicazioni*. Mc-Graw Hill, 1995.