



UNIVERSITY  
OF TRENTO

---

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE**

---

38050 Povo – Trento (Italy), Via Sommarive 14  
<http://www.disi.unitn.it>

RAPPORTO TECNICO N.3 – STUDIO ED IMPLEMENTAZIONE DI UN MODELLO  
ELETTROMAGNETICO PER ANALISI COPERTURA UMTS (MODELLO GANDINI  
RIUSCITI) – DIT-PRJ-08-034

A. Massa, and ELEDIALab

Dicembre 2008

Technical Report # DISI-08-077





*ELectromagnetic DIAgnostics Lab.*  
*Information and Communication Technology*  
*Dept.*  
*University of Trento*



Via Sommarive 14, 38050 Trento, ITALY  
Phone +39 0461 882057 Fax +39 0461 882093  
E-mail: [andrea.massa@ing.unitn.it](mailto:andrea.massa@ing.unitn.it)

**Contract No. DIT-PRJ-08-034**

## **Rapporto No. 3**

*Studio ed Implementazione di un Modello  
Elettromagnetico per Analisi di Copertura UMTS  
(Modello GANDINI-RUSCITTI)*

*Version: 1.0*

*Document status: Draft*

*Author: L. Manica*

*Access: Confidential*

*Date: 08.12.2008*

*Hour: 23.00*

# Table of Contents:

1. Introduzione	3
2. Definizioni	4
2.1 Parametri in Ingresso	4
2.2 Parametri in Uscita	5
2.3 Costi Computazionali	5
3. Validazione Numerica - Singolo Pixel	7
3.1 Numero Celle $N = 1$ - Singolo Pixel	7
3.2 Numero Celle $N = 2$ - Singolo Pixel	13
4. Piano di Validazione Numerica	22
Appendice A - Determinazione dominio di $G$	24
Bibliografia	26

# 1 Introduzione

Lo scopo di questo report riguarda l'illustrazione dei risultati preliminari ottenuti mediante l'utilizzo del software che implementa il modello elettromagnetico per l'analisi di copertura *UMTS* (Modello Gandini-Ruscitti) [1]. In dettaglio, nella Sezione 2 sono definiti i parametri d'ingresso al software, le quantità calcolate e le grandezze relative ai costi computazionali. Successivamente, sono mostrati i risultati di due casi di test: il primo riguarda un terminale mobile in collegamento con una sola cella  $N = 1$  (Sezione 3.1) mentre nel secondo il terminale riceve il segnale da  $N = 2$  celle (Sezione 3.2). Per ognuna delle situazioni studiate sono riportati:

- i parametri d'ingresso del software;
- le equazioni delle statistiche dei segnali;
- le equazioni alla base del calcolo della copertura del pixel;
- i risultati ottenuti;
- i costi computazionali del processo.

Infine, nella Sezione 4 è descritto un piano di validazione numerica del software implementato. In particolare, sono definiti i parametri di ingresso che il software deve ricevere e il tipo di simulazioni da effettuare sia per conoscere in modo completo le potenzialità e le limitazioni del modello, sia per raccogliere una serie di dati che verrà poi confrontata con misure effettuate in un sito il cui risultato fornirà la validazione del modello.

## 2 Definizioni

In questa sezione sono definiti tutti i parametri utilizzati per determinare la copertura di un singolo pixel, le quantità calcolate dal software implementato e le grandezze che descrivono i costi computazionali relativi ad ogni parte del software.

### 2.1 Parametri in Ingresso

I parametri d'ingresso sono stati divisi in tre differenti classi [2]: (a) i parametri provenienti dal *tool* di *planning* elettromagnetico, (b) i parametri relativi alla costruzione della mappa di copertura del pixel ed infine (c) i parametri che determinano il funzionamento del software.

#### 2.1.1 Tool Planning Elettromagnetico

- Livello di potenza del segnale ricevuto nel pixel proveniente dall' $n$ -esima cella:  $\langle x_n \rangle$  [dBm].
- Coefficiente di Potenza Segnale Pilota su Potenza Totale proveniente dall' $n$ -esima cella, riferito all' $i$ -esimo collegamento terminale mobile - cella:  $a_{in}; i = 1, \dots, N; n = 1, \dots, N$ .
- Rumore Termico riferito alla cella  $n$ -esima cella:  $c_n$  [mW].

#### 2.1.2 Costruzione Mappa di Copertura

- Soglia per il rapporto Segnale-Interferente:  $y_{thr}$  [dB].
- Soglia di Probabilità del rapporto Segnale-Interferente:  $P_{thr}$ .

#### 2.1.3 Funzionamento del Software

- Numero di Intervalli di discretizzazione per la variabile  $y_n$ :  $M_n^y; n = 1, \dots, N$ .
- Numero di Intervalli di discretizzazione per la variabile  $x_n$ :  $M_n^x; n = 1, \dots, N$ .
- Numero di Campioni della funzione  $f(\gamma)$ :  $H$ .
- Tipo di Campionamento.
- Metodo di Integrazione.
- Metodo di Inversione della Matrice.

## 2.2 Parametri in Uscita

Le quantità calcolate dal software durante l'elaborazione dei dati sono fornite sia per evidenziare il corretto funzionamento del software che eventuali criticità computazionali (malcondizionamento della matrice, campionamento non adeguato, etc.). In dettaglio, sono mostrate le seguenti quantità:

- $y_i = F(x_1, \dots, x_N); i = 1, \dots, N$ . Funzione che esprime il rapporto segnale-interferente relativo all' $i$ -esimo collegamento tra il terminale mobile e l' $i$ -esima cella come funzione delle intensità di segnale provenienti dalle  $N$  celle che trasmettono nel pixel.
- $y = \max(y_1, \dots, y_N)$ . Massimo rapporto segnale-interferente tra gli  $N$  collegamenti tra terminale mobile presente nel pixel e le  $N$  celle che lo raggiungono. Il modello considera come collegamento utile (cioè quello tramite il quale avviene la trasmissione dei dati) quello con il massimo rapporto segnale-interferente.
- $x_i = G(y_1, \dots, y_N); i = 1, \dots, N$ . Funzione inversa di  $F$ . Esprime l'intensità del segnale trasmesso dall' $i$ -esima cella come funzione dei rapporti segnali-interferenti relativi agli  $N$  collegamenti terminale-cella.
- $p_y(y_1, \dots, y_N)$ . Funzione densità di probabilità dei rapporti segnale-interferente relativi agli  $N$  collegamenti terminale-cella. Tale funzione non è nota a priori.
- $\int_0^{y_{thr}} p_y(y_1, \dots, y_N) dy_1 \dots dy_N$ . Funzione integrale di  $p_y$ . Rappresenta la probabilità che il generico campione  $(y_1, \dots, y_N)$  abbia tutte le componenti inferiori a  $y_{thr}$ .
- $f(\gamma)$ . Funzione che esprime la probabilità che il massimo rapporto segnale-interferente dei collegamenti terminale-cella  $y$  sia superiore alla soglia  $\gamma$ , cioè  $f(\gamma) = Pr[y > \gamma]$  [1].

## 2.3 Costi Computazionali

Allo scopo di mostrare i costi computazionali riferiti alle differenti fasi del processo di calcolo sono definite le seguenti quantità:

- $t_{dis}$  [sec]: tempo necessario al software per discretizzare il dominio di integrazione.
- $t_{int}$  [sec]: tempo di integrazione della funzione  $p_y(y_1, \dots, y_N)$ .
- $t_{tot}$  [sec]: tempo totale per il calcolo della copertura del pixel.  $t_{tot} = t_{dis} + t_{int}$ .
- $t_{f(\gamma)}$  [sec]: tempo necessario al calcolo della funzione  $f(\gamma)$ .

- *Memory [Byte]*: memoria occupata durante il processo di calcolo.



### 3 Validazione Numerica - Singolo Pixel

In questa sezione sono mostrati i risultati ottenuti dal software nel processo di calcolo della copertura di un singolo pixel. In dettaglio, sono state considerate due configurazioni: nella prima (Sezione 3.1) il terminale mobile presente nel pixel è in collegamento con una singola cella mentre nella seconda (Sezione 3.2) il terminale mobile è in connessione con due celle. Ogni caso di test è descritto accuratamente mostrando i dati considerati dal software (parametri d'ingresso) e definendo la formulazione matematica associata (equazioni deterministiche e statistiche dei segnali).

#### 3.1 Numero Celle $N = 1$ - Singolo Pixel

##### Parametri in Ingresso

- Livello di potenza del segnale ricevuto nel pixel:  $\langle x_1 \rangle [dBm]$ .
- Coefficiente di Potenza Segnale Pilota su Potenza Totale:  $a_{11}$ .
- Rumore Termico:  $c_1$ .
- Discretizzazione Spazio  $X$ : Uniforme.
- Discretizzazione Spazio  $Y$ : Uniforme.
- Metodo di Integrazione: Metodo dei Rettangoli [3, 4].
- Metodo di Inversione della Matrice: Decomposizione  $LU$  di Cholesky [3, 4].

##### Formulazione Matematica

- $y = \max(y_1) = y_1$ .
- $y_1 = \left(\frac{E_c}{I_0}\right) = \frac{10\left(\frac{x_1}{10}\right)}{a_{11}10\left(\frac{x_1}{10}\right) + c_1} = F(x_1)$ .
- $x_1 = 10 \log\left(\frac{y_1 c_1}{1 - a_{11} y_1}\right) = G(y_1)$ .
- $x_1 = 10 \log(A^{-1}B) = G(y_1)$  con:
  - $A$  matrice  $1 \times 1$  di equazione  $A = [y_1 a_{11} - 1]$ .
  - $B$  vettore  $1 \times 1$  di equazione  $B = [-y_1 c_1]$ .
- Dominio funzione  $G(y_1)$ :  $\left(\frac{y_1}{1 - a_{11} y_1}\right) > 0 \rightarrow (1 - a_{11} y_1) < 0 \rightarrow y_1 < \frac{1}{a_{11}}$ .

## Statistiche dei Segnali

- Funzione densità di probabilità  $p_x = N(\mu, \sigma)$  con  $\mu = \langle x_1 \rangle$ .
- Statistica livello di potenza ricevuto nel pixel,  $p_x(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{-(x_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}$ .
- Statistica del rapporto segnale su interferente  $y$ ,  $p_y(y_1) = p_x(G(y_1)) \det J_G$  con:
  - $\det J_G$  - determinante della funzione jacobiana di  $G$ .

## Probabilità $Pr[y > y_{thr}]$

- $Pr[y > y_{thr}] = 1 - Pr[1 \leq y_{thr}] = 1 - \int_0^{y_{thr}} p_y(y_1) dy_1 = 1 - \int_0^{y_{thr}} p_x(G(y_1)) \det J_G dy_1$ .
- $f(\gamma) = Pr[y > \gamma] = 1 - Pr[y < \gamma] = 1 - \int_0^\gamma p_y(y_1) dy_1 = 1 - \int_0^\gamma p_x(G(y_1)) \det J_G dy_1$ .

## Descrizione del Test Case

- $\langle x_1 \rangle = -94.06 [dBm]$ .
- $\sigma^2 = 8 [dBm]$ .
- $a_{11} = 3.6058$ .
- $\frac{1}{a_{11}} = 0.2773$ .
- $c_1 = 3.533 \times 10^{-10}$ .
- $M_1^y = 500 - M_1^x = 500$ .
- $H = 501$ .

## Simulazioni Numeriche

In questa sezione sono riportati i risultati più significativi ottenuti mediante le simulazioni effettuate considerando un terminale mobile presente nel  $j$ -esimo pixel che riceve il segnale da una singola cella. In dettaglio, in figura 1 è mostrato l'andamento del rapporto segnale-interferente  $y_1$  al variare del valore di campo trasmesso nel pixel dalla cella  $x_1$  espresso in  $dBm$ ,  $F(x_1)$ . La variabile  $y_1$  tende asintoticamente al valore di 0.2773 che rappresenta il valore massimo raggiungibile dal rapporto segnale-interferente.

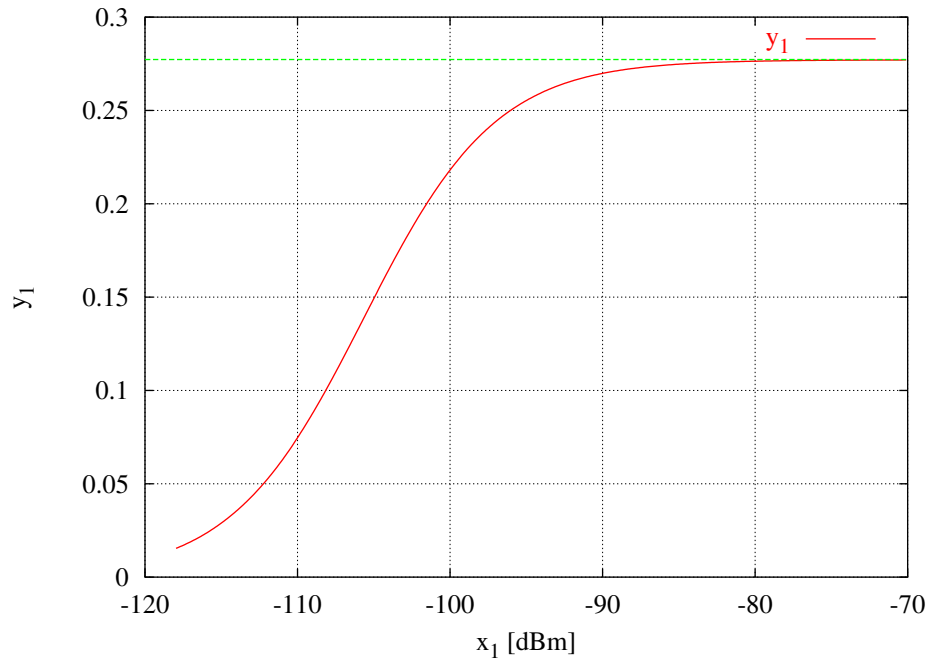


Figura 1:  $N = 1$  - Rapporto segnale-interferente  $y_1$  in funzione della potenza trasmessa  $x_1$

In figura 2 è mostrata invece la funzione inversa di  $F$ ,  $G$ . Essa fornisce indicazioni sul valore di campo  $x_1$  associato ad un determinato rapporto segnale-interferente  $y_1$ ; ad esempio, se  $y_1$  vale 0.21 ( $\sim -6.75$  [dBm]), la potenza trasmessa nel pixel dalla cella sarà nell'ordine di  $-100$  [dBm]. Come atteso, gli asintoti verticali di tale funzione si hanno per  $y_1 = 0.2773$  (potenza trasmessa nel pixel infinita) e per  $y_1 = 0.0$  (nessun cella trasmette nel pixel).

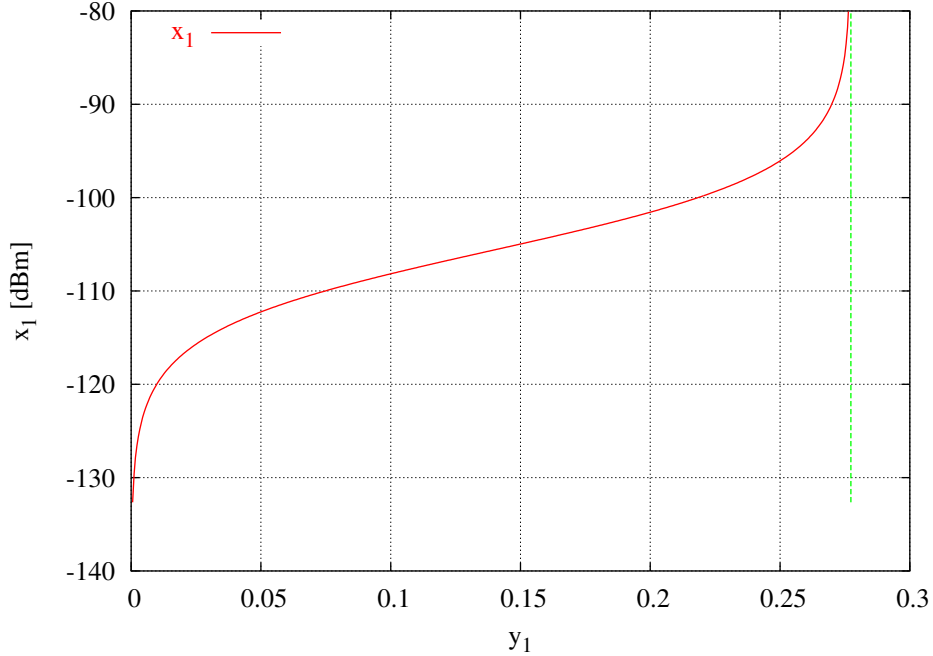


Figura 2:  $N = 1$  - Potenza trasmessa nel pixel  $x_1$  in funzione del rapporto segnale-interferente  $y_1$

Una volta assunta la densità di probabilità  $p_x$  della potenza del segnale trasmessa dalla cella di tipo gaussiano con varianza  $\sigma^2 = 8 [dBm]$  [1] è stata calcolata la densità di probabilità del rapporto segnale-interferente  $p_y$  la cui successiva integrazione fornisce l'informazione riguardante la copertura del pixel. Si considerino dunque le figure 3 e 4 che mostrano rispettivamente la densità di probabilità del rapporto segnale-interferente  $y_1$  del collegamento tra il pixel e la cella trasmittente indicata con  $p_y(y_1)$  e la probabilità che il rapporto segnale-interferente  $y_1$  sia inferiore ad una determinata soglia  $y_{thr}$ ,  $P[y < y_{thr}]$ . Si noti innanzitutto come tali funzioni siano definite per valori di  $y \in [0, 0.2773)$  che rappresentano il limite minimo (non c'è trasmissione di potenza nel pixel) e il limite massimo. Inoltre, il fatto che valga  $P[y < 0.2773] = 1$  assicura la correttezza del valore dell'integrale e del processo di calcolo di  $p_y$  [1]. Si noti poi come esse assumano valori significativi ( $p_y > 5.400 \times 10^{-3}$ ,  $P[y < y_{thr}] > 6.0851 \times 10^{-5}$ ) solo per valori di  $y > 0.15$ . E' dunque possibile focalizzare il calcolo di tali funzioni in un insieme più ristretto, diminuendo i costi computazionali riducendo il numero di campioni  $M_1^y$  mantenendo la stessa accuratezza nei risultati o viceversa, mantenendo lo stesso numero di campioni  $M_1^y$  ed incrementando dunque l'accuratezza dei risultati.

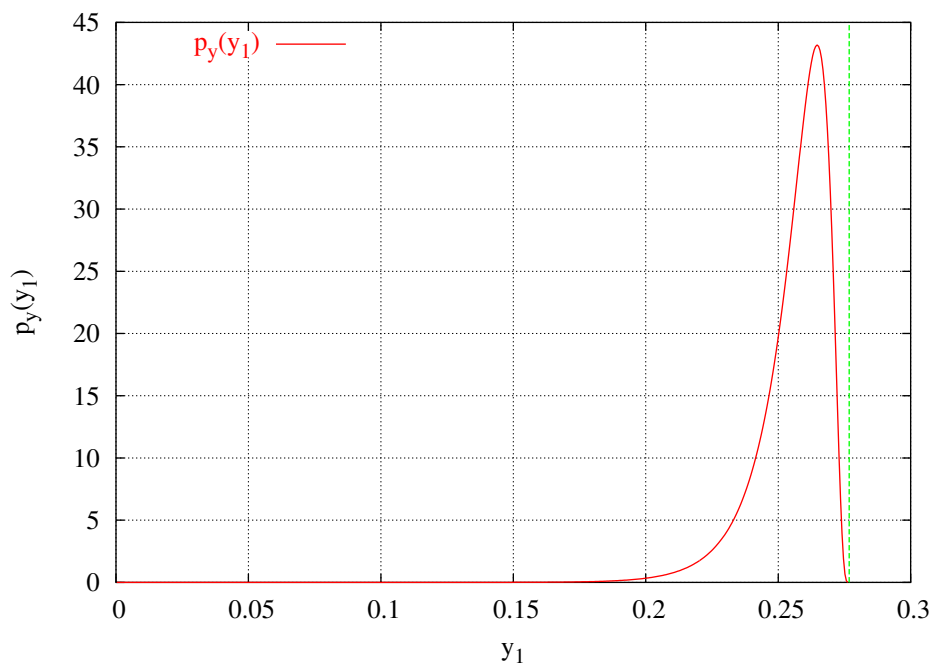


Figura 3:  $N = 1$  - Densità di probabilità del rapporto segnale-interferente  $y_1$

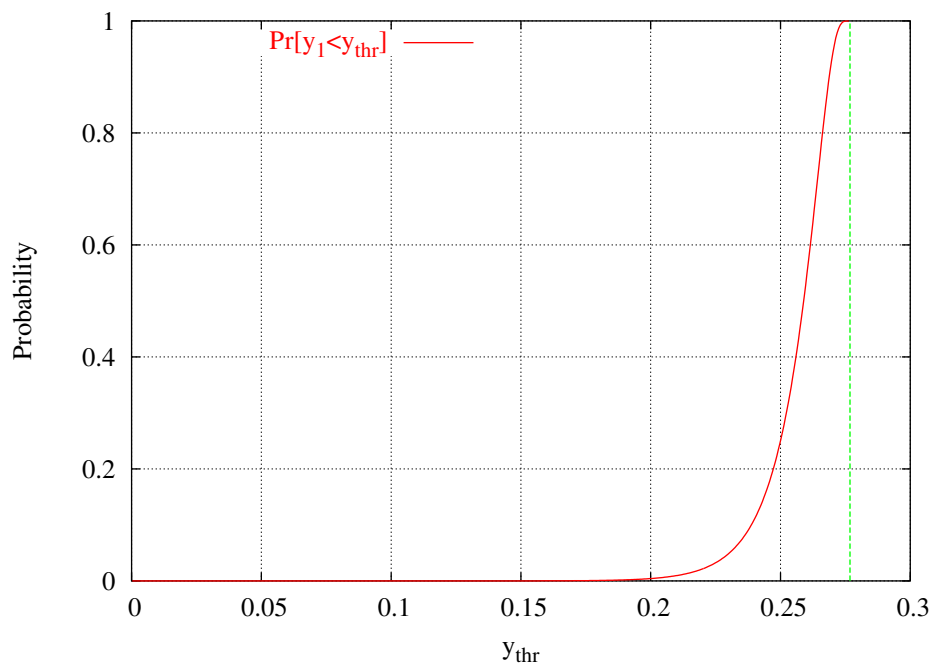


Figura 4:  $N = 1$  - Probabilità che il rapporto segnale interferente  $y_1$  sia inferiore ad un soglia  $y_{thr}$

Allo scopo di valutare in modo completo la copertura probabilistica del pixel, è stata calcolata la funzione  $f(\gamma)$  che esprime la probabilità che il rapporto segnale-interferente del collegamento terminale-cella sia superiore ad una determinata soglia  $\gamma$ , cioè  $f(\gamma) = Pr[y > \gamma]$ . Con riferimento alla figura 5, si noti come una volta fissata una soglia di probabilità  $P_{thr}$  e di rapporto segnale-interferente  $y_{thr}$  diventi immediato verificare la copertura o meno del pixel: si consideri ad esempio  $P_{thr} = 0.8$  e  $y_{thr} = -6 [dBm]$ ; risulta evidente che il pixel non è coperto perchè ad una soglia di  $-6 [dBm]$  corrisponde una probabilità di  $P[y > -6 dBm]$  pari a 0.75 e dunque inferiore a  $P_{thr}$ .

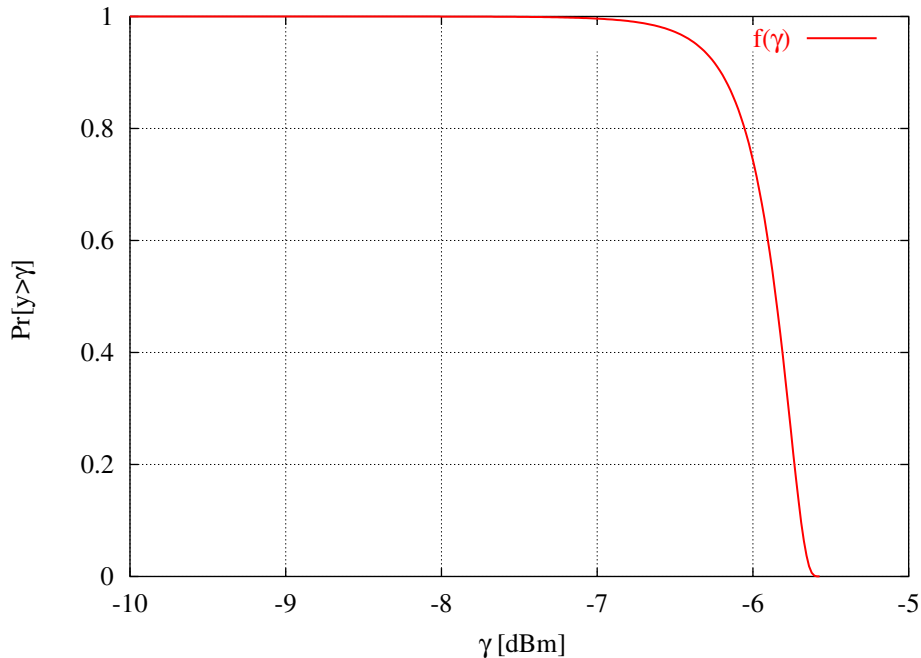


Figura 5:  $N = 1$ - Probabilità che il rapporto segnale-interferente  $y_1$  sia superiore alla soglia  $\gamma$

Per quanto riguarda i costi computazionali del caso di test considerato, essi sono riportati nella Tabella I. I tempi di calcolo fanno riferimento a simulazioni ottenute su un PC portatile TOSHIBA S5200-801 con Processore Pentium IV, frequenza 2 [GHz] e 512 MByte di RAM. Tali costi non risultano essere particolarmente gravosi: il risultato del processo di integrazione è ottenuto in  $\sim 0.3 [sec]$  mentre la memoria occupata è di circa 4KByte. Le informazioni complete riguardo la copertura del pixel ottenute tramite la funzione  $f(\gamma)$  sono ottenute in circa  $\sim 15 [sec]$ .

Memory [Byte]	$t_{dis} [sec]$	$t_{int} [sec]$	$t_{tot} [sec]$	$t_{f(\gamma)} [sec]$
$\sim 4 \times 10^3$	$< 10^{-6}$	$3 \times 10^{-1}$	$3 \times 10^{-1}$	$1.5 \times 10^2$

Tabella I:  $N = 1$  - Costi computazionali

## 3.2 Numero Celle $N = 2$ - Singolo Pixel

### Parametri in Ingresso:

- Livello di potenza del segnale ricevuto nel pixel:  $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle$  [dBm].
- Coefficienti di Potenza Segnale Pilota su Potenza Totale Cella 1:  $a_{11} = a_{12}$ .
- Coefficienti di Potenza Segnale Pilota su Potenza Totale Cella 2:  $a_{21} = a_{22}$ .
- Rumore Termico Cella 1:  $c_1$ .
- Rumore Termico Cella 2:  $c_2$ .
- Discretizzazione Spazio  $X$ : Uniforme.
- Discretizzazione Spazio  $Y$ : Uniforme.
- Metodo di Integrazione: Metodo dei Rettangoli [3, 4].
- Metodo di Inversione della Matrice: Decomposizione  $LU$  di Choelsky [3, 4].

### Formule Analitiche

- $y = \max(y_1, y_2)$ .
- $(y_1, y_2) = \left( \frac{10^{\left(\frac{x_1}{10}\right)}}{a_{11}10^{\left(\frac{x_1}{10}\right)} + a_{12}10^{\left(\frac{x_2}{10}\right)} + c_1}, \frac{10^{\left(\frac{x_2}{10}\right)}}{a_{21}10^{\left(\frac{x_1}{10}\right)} + a_{22}10^{\left(\frac{x_2}{10}\right)} + c_2} \right) = F(x_1, x_2)$ .
- $(x_1, x_2) = \left( 10 \log \left\{ \frac{\left[ \frac{-y_2 c_2 (y_1 k_1 - 1) + y_2 k_2 y_1 c_1}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]}{\left[ 1 - \frac{y_1 y_2 k_1 k_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]} \right\}, 10 \log \left\{ \frac{\left[ \frac{-y_1 c_1 (y_2 k_2 - 1) + y_1 k_1 y_2 c_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]}{\left[ 1 - \frac{y_1 y_2 k_1 k_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]} \right\} \right) = G(y_1, y_2)$   
con  $k_1 = a_{11} = a_{12}$  e  $k_2 = a_{21} = a_{22}$ .
- $(x_1, x_2) = 10 \log(A^{-1}B) = G(y_1, y_2)$  con:

$$- A \text{ matrice } 2 \times 2 \text{ di equazione } A = \begin{bmatrix} (y_1 a_{11} - 1) & y_1 a_{12} \\ y_2 a_{21} & (y_2 a_{22} - 1) \end{bmatrix}$$

$$- B \text{ vettore } 2 \times 1 \text{ di equazione } B = \begin{bmatrix} -y_1 c_1 \\ -y_2 c_2 \end{bmatrix}.$$

- Dominio funzione  $G(y_1, y_2)$ :

$$\left\{ \frac{\left[ \frac{-y_2 c_2 (y_1 k_1 - 1) + y_2 k_2 y_1 c_1}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]}{\left[ 1 - \frac{y_1 y_2 k_1 k_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]} \right\} > 0 \cup \left\{ \frac{\left[ \frac{-y_1 c_1 (y_2 k_2 - 1) + y_1 k_1 y_2 c_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]}{\left[ 1 - \frac{y_1 y_2 k_1 k_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]} \right\} > 0 \rightarrow k_1 y_1 + k_2 y_2 < 1 \text{ (si veda l'Appendice A per i dettagli).}$$

## Statistiche dei Segnali

- Funzione densità di probabilità  $p_x = N(\underline{\mu}, \Sigma)$  con  $\mu = [\mu_1, \mu_2] = [ \langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle ]$ .
- Statistica livello di potenza del segnale ricevuto nel pixel:  

$$p_x(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \det|\Sigma|} \exp - \left[ \begin{array}{cc} x_1 - \mu_2 & x_2 - \mu_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{array} \right].$$
- Statistica del rapporto segnale su interferente  $y$ ,  $p_y(y_1, y_2) = p_x(G(y_1, y_2)) \det J_G$ .

## Probabilità $Pr[y = \max(y_1, y_2) > y_{thr}]$

- $Pr[y > y_{thr}] = 1 - \int_{A_{y_{thr}}} p_x(G(y_1, y_2)) \det J_G dy_1 dy_2$  con:  
 -  $A_{y_{thr}}$  dominio di Integrazione:  $A_{y_{thr}} = \{(y_1, y_2) \mid y_1 < y_{thr}; y_2 < y_{thr}; k_1 y_1 + k_2 y_2 < 1\}$ .
- $f(\gamma) = 1 - \int_0^{\gamma} p_x(G(y_1, y_2)) \det J_G dy_1 dy_2$  con:  
 -  $A_\gamma$  dominio di Integrazione:  $A_\gamma = \{(y_1, y_2) \mid y_1 < \gamma; y_2 < \gamma; k_1 y_1 + k_2 y_2 < 1\}$ .

## Descrizione del Test Case [1]

- $\langle x_1 \rangle = -94.06 [dBm]$ .
- $\langle x_2 \rangle = -95.26 [dBm]$ .
- Matrice di Covarianza  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} [dBm]$ .
- $a_{11} = a_{12} = 3.6058, \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{a_{12}} = 0.2773$ .
- $a_{22} = a_{21} = 3.4754, \frac{1}{a_{22}} = \frac{1}{a_{21}} = 0.2877$ .
- $c_1 = 3.533 \times 10^{-10}, c_2 = 3.405 \times 10^{-10}$ .
- $M_1^y = M_2^y = 200 - M_1^x = M_2^x = 200$ .
- $H = 101$ .



## Simulazioni Numeriche

Allo scopo di visualizzare il comportamento deterministico dei rapporti segnale-interferente  $y_1$  e  $y_2$ , relativi rispettivamente al collegamento tra un terminale mobile presente in un generico pixel e la prima e la seconda cella, consideriamo i risultati mostrati in Figura 6 ( $y_1$ ) e Figura 7 ( $y_2$ ). Si noti come in entrambi i casi un elevato valore di potenza trasmessa dalla cella relativa al collegamento ( $x_1$  nel caso di  $y_1$  e  $x_2$  nel caso di  $y_2$ ) non è sufficiente a garantire un adeguato rapporto segnale-interferente. Questo perchè un ruolo fondamentale è giocato dalla potenza trasmessa dall'altra cella che è interpretata come interferente dal terminale mobile in collegamento. Tale comportamento spiega il valore massimo di  $y_1 \sim 0.2773$  e  $y_2 \sim 0.2877$  rispettivamente nel punto  $(x_1, x_2) = (-70, -130)$  [dBm] e  $(x_1, x_2) = (-130, -70)$  [dBm], e i valori di  $y_1 \sim y_2 = 0.15$  nel punto  $(x_1, x_2) = (-70, -70)$  [dBm].

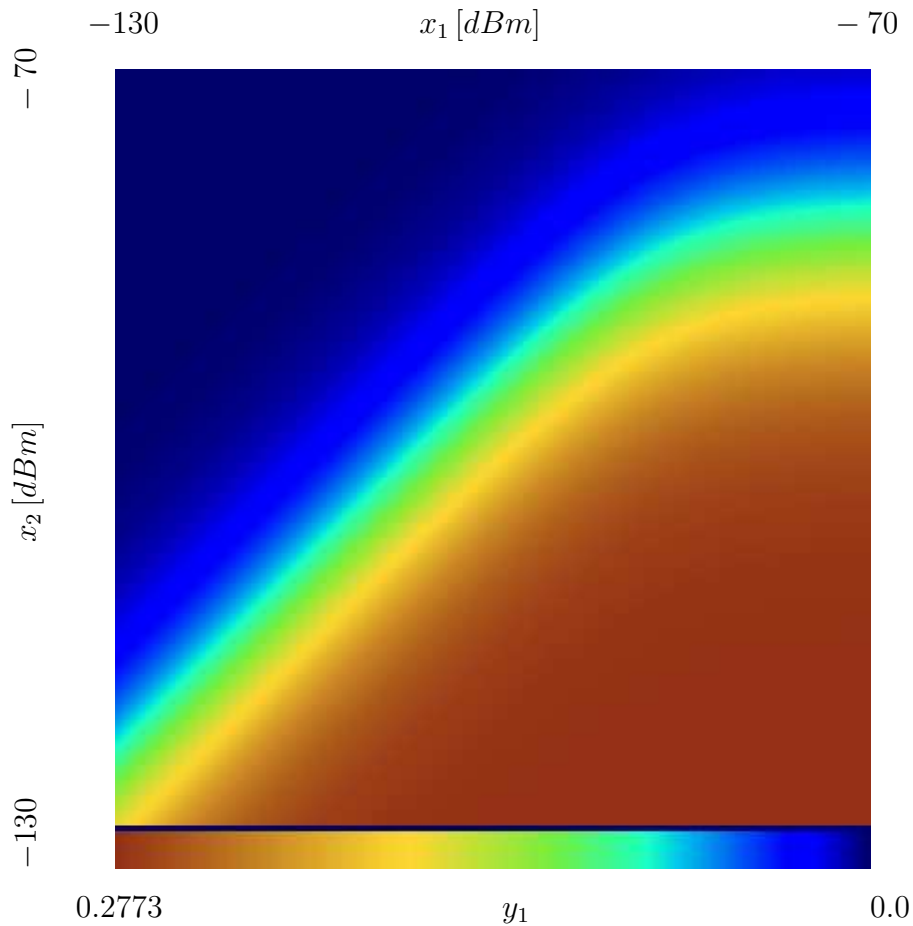


Figura 6:  $N = 2$  - Rapporto segnale-interferente  $y_1$  in funzione delle potenze  $x_1$  e  $x_2$

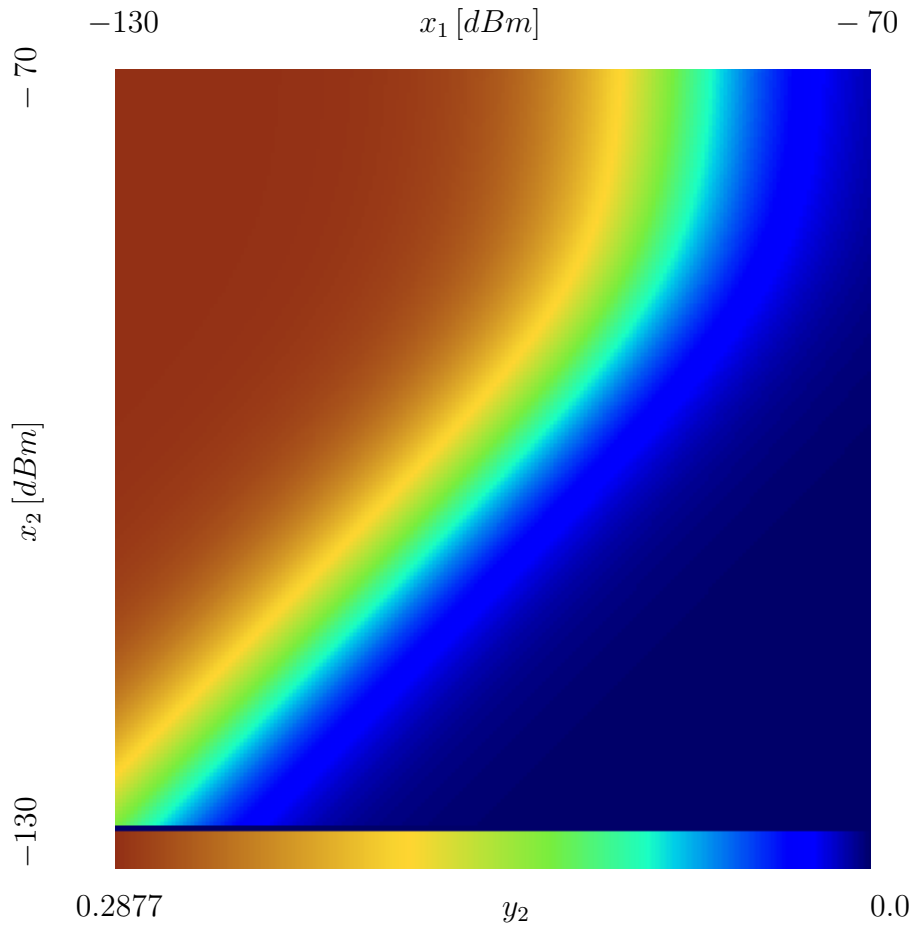


Figura 7:  $N = 2$  - Rapporto segnale-interferente  $y_2$  in funzione delle potenze  $x_1$  e  $x_2$

La dimostrazione del corretto funzionamento del processo di inversione è mostrata nelle figure 8 (a) e (b) dove i valori di rapporto segnale-interferente campionati  $y_1$  e  $y_2$  sono confrontati con quelli ottenuti calcolando i corrispondenti valori di potenza trasmessi nella cella come  $(x_1, x_2) = 10 \log(A^{-1}B)$  ed applicando a tali valori la funzione  $F$  (tali valori sono indicati come  $y_{1c}$  e  $y_{2c}$ ). Il perfetto accordo tra le quantità campionate e calcolate certifica che il procedimento di inversione sia stato svolto in modo corretto.

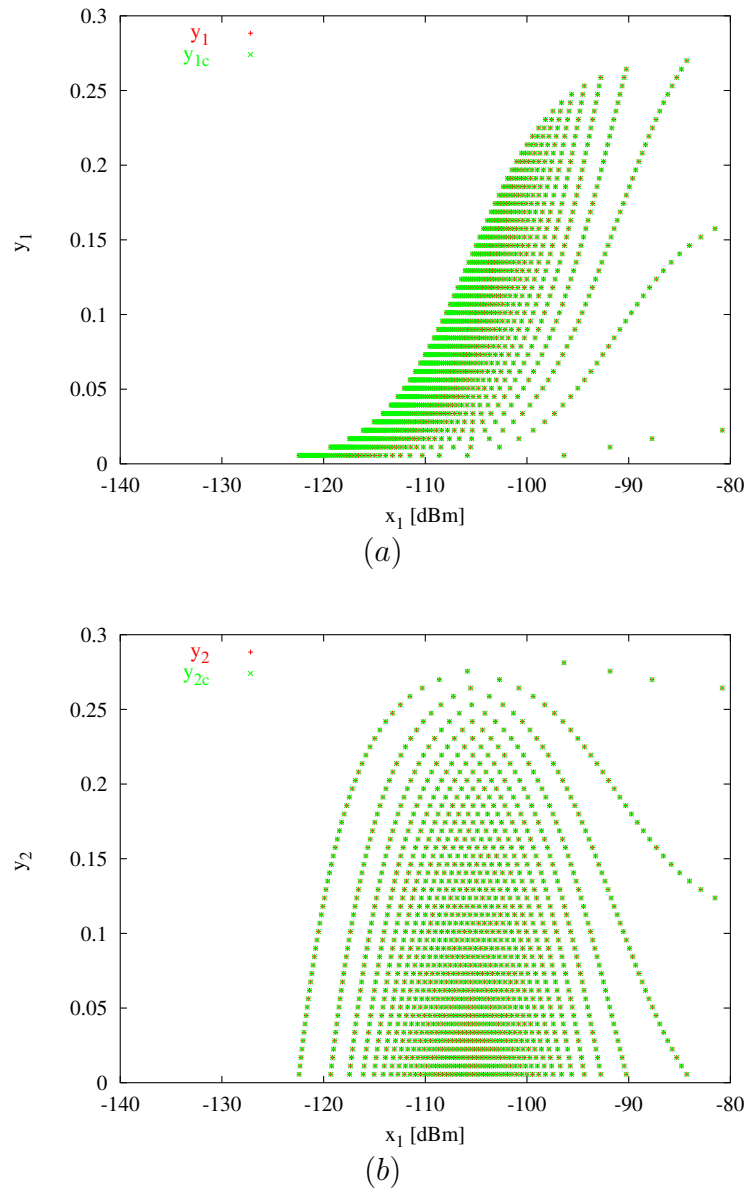


Figura 8:  $N = 2$  - Verifica del processo di inversione - Confronto tra rapporti segnale-interferente ottenuti mediante campionamento e mediante inversione della matrice con successiva applicazione della funzione  $F$ .

Nell'ipotesi di una distribuzione statistica della potenza ricevuta nel pixel di tipo gaussiano bi-dimensionale si è calcolata la densità di probabilità congiunta  $p_y$  dei rapporti segnale-interferente  $y_1$  e  $y_2$ . Tale funzione è mostrata in figura 9. Essa è definita solamente nel semipiano definito dall'equazione  $y_1 a_{11} + y_2 a_{22} < 0$  che corrisponde alla parte superiore destra della figura.  $p_y$  risulta avere un singolo massimo del valore di circa 610 nel punto  $(y_1, y_2) = (0.185, 0.087)$  ed assume valori significativi solo in una piccola porzione di piano posizionata parallelamente alla retta che definisce il dominio della funzione. Tale comportamento è spiegato considerando che tali valori di  $y_1$  e  $y_2$  sono generati da livelli di segnale  $x_1$  e  $x_2$  che si trovano vicino al valore medio della gaussiana che descrive il loro comportamento statistico. Inoltre si osservi come il comportamento "impulsivo" della  $p_y$  possa portare ad un'ottimizzazione del codice che potrà considerare solo le porzioni di spazio dove essa assume valori significativi.

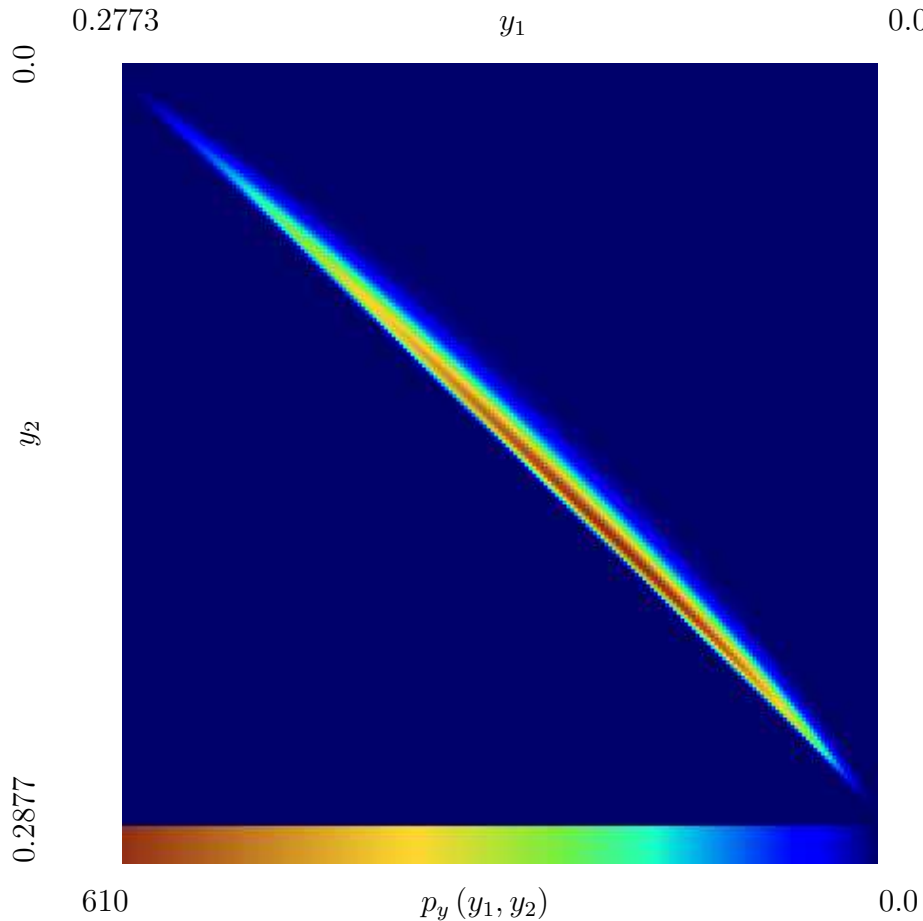


Figura 9:  $N = 2$  - Densità di probabilità congiunta dei rapporti segnale-interferente  $y_1$  e  $y_2$ ,  $p_y(y_1, y_2)$

Riferendosi invece all'integrazione della funzione  $p_y$  allo scopo di calcolare la probabilità che valgano le relazioni  $y_1 < y_{1-thr}$  e  $y_2 < y_{2-thr}$  si consideri il risultato riportato in figura 10. L'accuratezza del calcolo è provata dal fatto che tale probabilità tende asintoticamente al valore 1 nel punto  $(y_{1-thr}, y_{2-thr}) = (0.2773, 0.2877)$  le cui coordinate rappresentano i valori massimi per i rapporti segnale-interferente  $y_1$  e  $y_2$ .

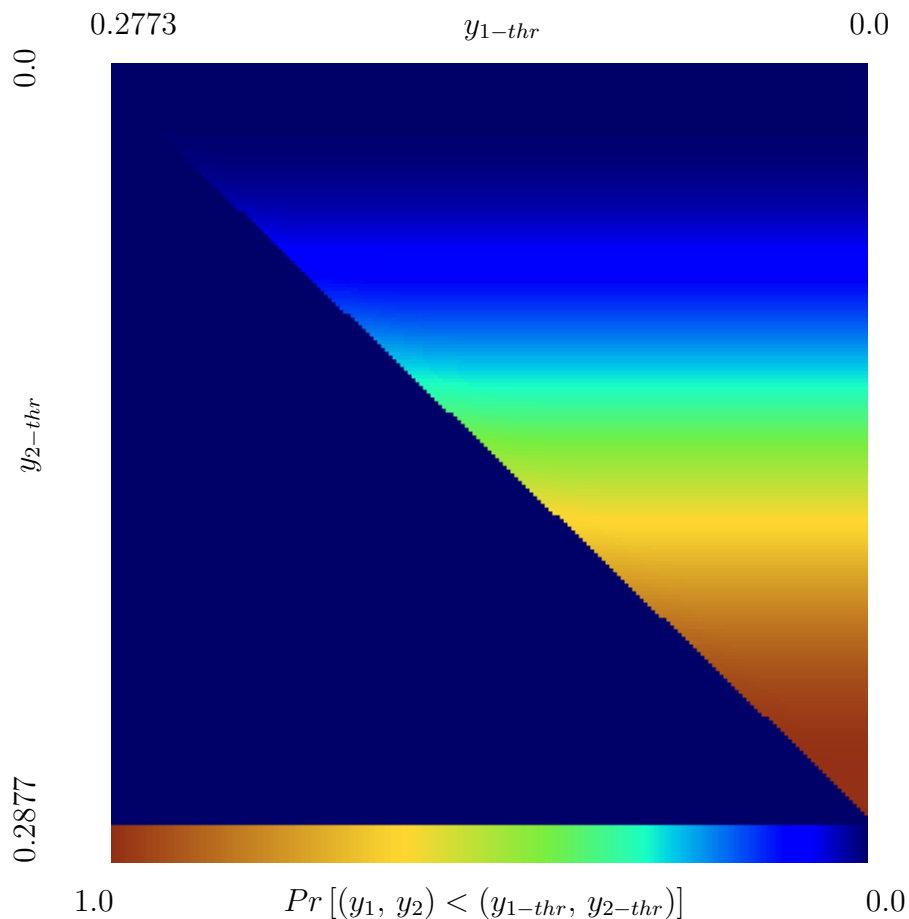


Figura 10:  $N = 2$  - Probabilità che i rapporti segnale-interferenti  $y_1$  e  $y_2$  siano inferiori rispettivamente alle soglie  $y_{1-thr}$  e  $y_{2-thr}$

Il processo di integrazione della funzione  $p_y$  è stato inoltre utilizzato per il calcolo della funzione  $f(\gamma)$  definita come la probabilità che il massimo tra i due rapporti segnale-interferente  $y_1$  e  $y_2$  sia superiore ad una soglia  $\gamma$ , cioè  $f(\gamma) = Pr[y = \max(y_1, y_2) > \gamma]$ . La funzione è riportata in figura 11. Come atteso, la funzione è monotona decrescente (aumentando la soglia  $\gamma$  diminuirà la probabilità che essa possa essere superata). Tale funzione permette l'analisi della copertura del pixel: si consideri, ad esempio, un pixel coperto se il massimo rapporto segnale-interferente  $y$  supera la soglia di  $y_{thr} = -9.5$  [dBm] con una probabilità  $P_{thr} = 0.95$ . Utilizzando il grafico di figura 11 si trova:  $f(-9.5) = 0.99$  e dunque il pixel risulta coperto ( $0.99 > P_{thr}$ ). Viceversa, fissando la soglia a  $y_{thr} = -8.5$  [dBm] e mantenendo la stessa probabilità  $P_{thr}$  si ha:  $f(-8.5) = 0.92$  e dunque il pixel non è coperto ( $0.92 < P_{thr}$ ).

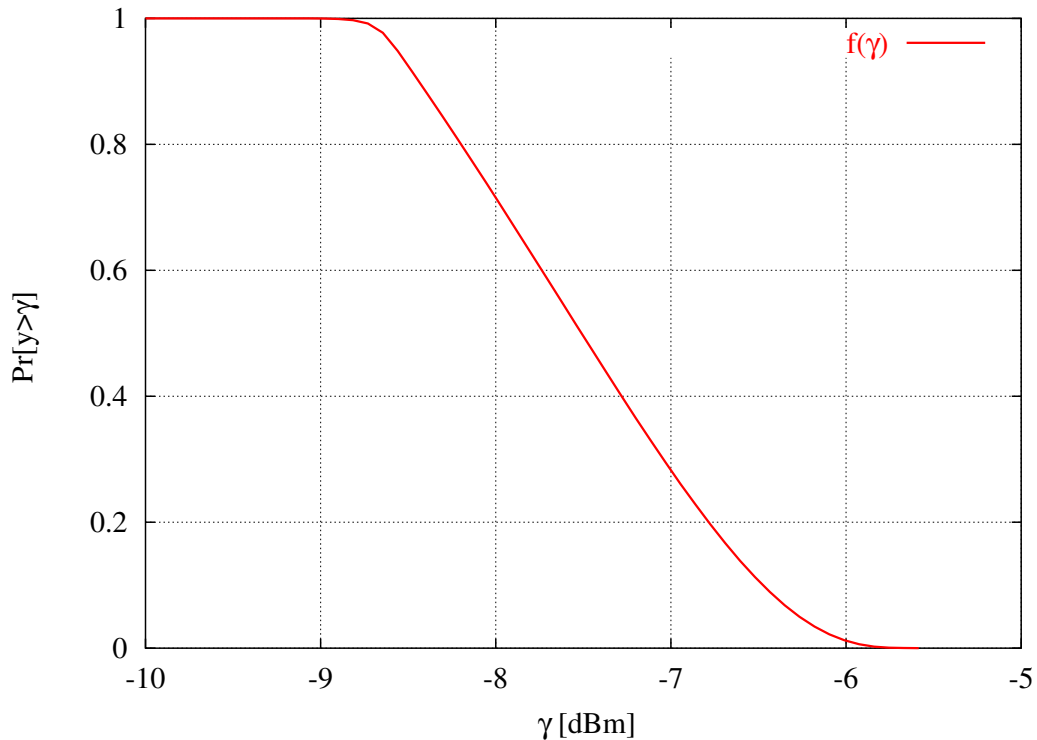


Figura 11:  $N = 2$  - Probabilità che il massimo rapporto segnale-interferente  $y$  sia superiore alla soglia  $\gamma$

E' importante comparare la funzione  $f(\gamma)$  appena calcolata con quella ottenuta considerando una singola cella trasmittente (figura 12). Si nota come le prestazioni del sistema quando nel pixel trasmettono due celle siano peggiori di quando trasmette una singola cella. Questo dipende dalla formulazione del modello che considera come interferente il segnale proveniente dalla cella con cui il terminale mobile non è in collegamento (il terminale mobile considera il rapporto segnale-interferente maggiore), dunque nel caso  $N = 2$  è stata aggiunta una fonte supplementare di rumore che degrada le prestazioni. Tale osservazione offre comunque

una possibilità per un eventuale miglioramento del modello che tenga in considerazione del meccanismo di *soft-handover* e calcoli il segnale utile come combinazione lineare dei segnali provenienti dalle celle in collegamento.

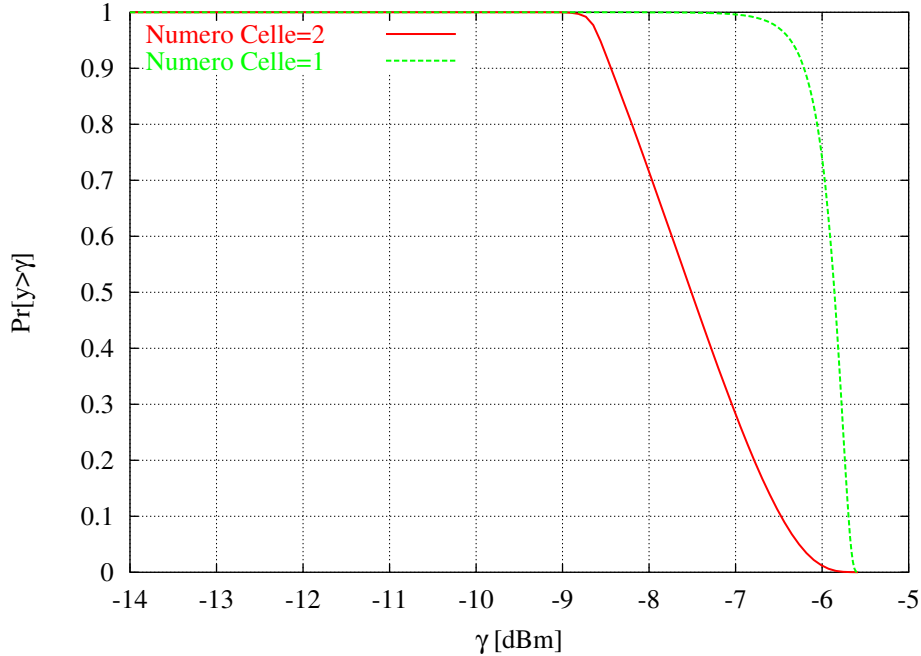


Figura 12: Confronto tra  $f(\gamma)$  nel caso di terminale mobile collegato con  $N = 1$  (verde) o  $N = 2$  (rosso) celle.

Infine, in Tabella II sono riportati i costi computazionali dell'intero processo di calcolo: il calcolo della copertura del pixel avviene in circa 15 [sec] mentre la memoria occupata risulta essere  $\sim 300Kbyte$ . Anche in questo caso le simulazioni sono state effettuate su un portatile TOSHIBA S5200-801 con Processore Pentium IV, frequenza 2 [GHz] e 512 MByte di RAM.

$Memory [Byte]$	$t_{dis} [sec]$	$t_{int} [sec]$	$t_{tot} [sec]$	$t_{f(\gamma)} [sec]$
$\sim 3.17 \times 10^5$	$3.96 \times 10^{-4}$	$1.524 \times 10^1$	$1.524 \times 10^1$	$1.44 \times 10^3$

Tabella II:  $N = 2$  - Costi computazionali

## 4 Piano di Validazione Numerica

Nel piano di validazione numerica del modello per l'analisi di copertura *UMTS* (Modello Gandini-Ruscitti) una parte dei parametri che devono essere forniti al software sono gli stessi che hanno portato al calcolo della copertura di un singolo pixel, ovviamente forniti per ogni pixel in cui è diviso il sito:

- Livello di potenza del segnale ricevuto nel pixel proveniente dall' $n$ -esima cella:  $\langle x_n \rangle$  [dBm].
- Coefficiente di Potenza Segnale Pilota su Potenza Totale proveniente dall' $n$ -esima cella, riferito all' $i$ -esimo collegamento terminale mobile - cella:  $a_{in}$ ;  $i = 1, \dots, N$ ;  $n = 1, \dots, N$ .
- Rumore Termico riferito alla cella  $n$ -esima cella:  $c_n$  [mW].

Inoltre, saranno presenti tutti i parametri relativi alla topologia del sito:

- Numero totale dei pixel.
- Coordinate di ogni pixel.

Ognuno dei parametri descritti è fornito dal software di *planning* elettromagnetico mediante *files* che saranno opportunamente elaborati per una più facile lettura dei parametri da parte del software che implementa il modello di copertura.

Allo scopo di valutare le prestazioni del modello ed evidenziarne le criticità sarà necessario eseguire una serie di simulazioni riguardanti diversi aspetti dello stesso. Questi casi di test sono di seguito schematizzati.

### Test Case - Numero di Celle in Comunicazione Variabile

OBIETTIVI: determinare l'effetto che il numero di celle in comunicazione con il singolo pixel ha sulla sua copertura e sui costi computazionali.

PROCEDURA: fissato un valore di soglia sul rapporto segnale-interferente e sulla probabilità di copertura variare il numero massimo di celle da  $N = 1, \dots, N_{max}$  che possono trasmettere nel pixel e valutare: (a) il valore di probabilità di superamento della soglia raggiunto, (b) i costi computazionali associati.

### Test Case - Probabilità di Soglia Copertura Variabile

OBIETTIVI: determinare l'effetto che il valore della probabilità di soglia  $P_{thr}$  sulla copertura ha sulla mappa di copertura.



PROCEDURA: fissato un numero massimo di celle che possono trasmettere nei pixel  $N_{max}$  ed un valore di soglia sul rapporto segnale interferente  $y_{thr}$  calcolare la mappa di copertura del sito per differenti valori della probabilità di soglia  $P_{thr}$ .

### **Test Case - Rapporto Segnale-Interferente di Soglia Variabile**

OBIETTIVI: determinare l'effetto che il valore del rapporto segnale-interferente di soglia  $y_{thr}$  ha sulla mappa di copertura.

PROCEDURA: fissato un numero massimo di celle che possono trasmettere nei pixel  $N_{max}$  ed un valore di probabilità sul rapporto segnale-interferente  $P_{thr}$  calcolare la mappa di copertura del sito per differenti valori della probabilità di soglia  $y_{thr}$ .

## Appendice A - Determinazione del Dominio di $G$

Lo scopo di questa appendice è quello di calcolare il dominio della funzione inversa di  $F$ ,  $G$ . Per questo fine, si ricordino le espressioni dei termini della funzione  $F$ ,  $y_1$  e  $y_2$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{10^{x_1/10}}{a_{11}10^{x_1/10} + a_{12}10^{x_2/10} + c_1} \\ y_2 &= \frac{10^{x_2/10}}{a_{21}10^{x_1/10} + a_{22}10^{x_2/10} + c_2} \end{aligned} \quad (1)$$

Per semplificare la trattazione, si ponga:  $10^{x_1/10} = w_1$ ,  $10^{x_2/10} = w_2$ ,  $a_{11} = a_{12} = k_1$  e  $a_{21} = a_{22} = k_2$  e si riscrivano le equazioni in (1) come:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{w_1}{k_1 w_1 + k_1 w_2 + c_1} \\ y_2 &= \frac{w_2}{k_2 w_1 + k_2 w_2 + c_2} \end{aligned} \quad (2)$$

Dalla prima equazione si ottenga l'espressione analitica per  $w_1$  in funzione di  $y_1$  e  $w_2$ :

$$w_1 = \frac{-y_1 c_1 - y_1 k_1 w_2}{(y_1 k_1 - 1)} \quad (3)$$

mentre dalla seconda equazione si ottenga l'espressione analitica per  $w_2$  in funzione di  $y_2$  e  $w_1$ :

$$w_2 = \frac{-y_2 c_2 - y_2 k_2 w_1}{(y_2 k_2 - 1)} \quad (4)$$

Si sostituisca (3) in (4) e si ottenga:

$$w_2 = \frac{-y_2 c_2 - y_2 k_2 \left[ \frac{-y_1 c_1 - y_1 k_1 w_2}{(y_2 k_2 - 1)} \right]}{(y_2 k_2 - 1)}, \quad (5)$$

si manipoli l'equazione (5) e si ottenga l'espressione analitica per  $w_2$  in funzione dei soli  $y_1$  e  $y_2$ :

$$w_2 = \frac{\left[ \frac{-y_2 c_2 (y_1 k_1 - 1) + y_2 k_2 y_1 c_1}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]}{\left[ 1 - \frac{y_1 y_2 k_1 k_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \right]} \quad (6)$$

Si studi ora il segno di  $w_2$  perchè non sono ammessi come soluzioni del sistema valori negativi. Si osservi che valgono le seguenti proprietà:

1.  $y_1, y_2 > 0$  per ipotesi
2.  $k_1, k_2 > 0$  per ipotesi
3.  $c_1, c_2 > 0$  per ipotesi

4.  $(y_1 k_1 - 1), (y_2 k_2 - 1) < 0$  perchè  $y_1 < k_1 = a_{11}$  e  $y_2 < k_2 = a_{22}$  per ipotesi.
5.  $(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1) > 0$  per la proprietà 4.
6.  $-y_2 c_2 (y_1 k_1 - 1) + y_2 k_2 y_1 c_1 > 0$  per la 1. 2. 3. e per la 4.

Si avrà dunque che il segno di  $w_2$  sarà lo stesso dell'espressione:

$$f(y_1, y_2, k_1, k_2) = 1 - \frac{y_1 y_2 k_1 k_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)}. \quad (7)$$

Si veda ora per quali valori di  $y_1, y_2, k_1, k_2$ ,  $f(y_1, y_2, k_1, k_2)$  è maggiore di zero. Si ha:

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, k_1, k_2) &= 1 - \frac{y_1 y_2 k_1 k_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)} \\ f(y_1, y_2, k_1, k_2) &= \frac{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1) - y_1 y_2 k_1 k_2}{(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Per la proprietà 5 vale:  $(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1) > 0$  e dunque si semplifichi l'analisi studiando il segno del solo numeratore dell'equazione (8):

$$(y_1 k_1 - 1)(y_2 k_2 - 1) - y_1 y_2 k_1 k_2 > 0 \quad (9)$$

da cui

$$y_1 k_1 y_2 k_2 - y_1 k_1 - y_2 k_2 + 1 > y_1 y_2 k_1 k_2 \quad (10)$$

infine si ha che  $w_2 > 0$  se vale la seguente disuguaglianza:

$$y_1 k_1 + y_2 k_2 < 1 \quad (11)$$

In modo del tutto analogo (sostituendo (4) in (3) e procedendo nello stesso modo) si ha che  $w_1 > 0$  se vale la (11).

## References

- [1] L. Gandini and G. Ruscitti, “A New Method for Estimation of UMTS Coverage Areas by Planning Tool,” *Internal Report VODAFONE Italia*, 2008.
- [2] L. Manica, “Studio ed Implementazione di un Modello per l’Analisi e della Stima di Coperture UMTS,” Report no. 2, *Gruppo ELEDIA*, Università di Trento, Novembre 2008.
- [3] V. Comincioli, *Analisi Numerica: metodi, modelli, applicazioni*. Mc-Graw Hill, 1995.
- [4] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri, *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2000.